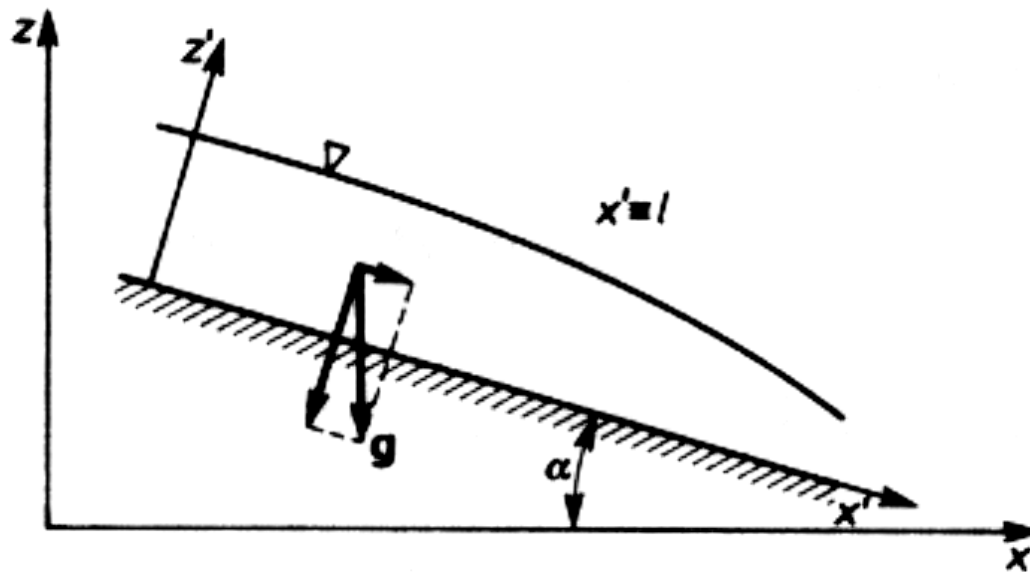


## J. Szantyr – Wykład nr 17 – Przepływy w kanałach otwartych

Przepływy w kanałach otwartych najczęściej wymuszane są działaniem siły grawitacji. Jako wstępny uproszczony przypadek przeanalizujemy spływ warstwy cieczy nielepkiej o grubości  $h$  i jednostkowej szerokości po nachylonej płaszczyźnie, pomijając wpływ ścian bocznych kanału. Jest to możliwe przy zaniedbaniu sił tarcia cieczy o powierzchnię kanału. Wprowadzamy dwa układy współrzędnych, układ  $Ox'z'$  jest związany z nachyloną płaszczyzną.



W tym przypadku równanie zachowania pędu ma postać:

$$\frac{\partial p}{\partial z'} = -\rho g \cos \alpha \quad \text{w kierunku } z'$$

$$\rho u h \frac{du}{dx'} = \rho g h \sin \alpha - \frac{dp}{dx'} h \quad \text{w kierunku } x'$$

Z pierwszego otrzymujemy:  $p = p_0 + \rho g (h - z') \cos \alpha$

gdzie:  $p_0$  - ciśnienie na swobodnej powierzchni

Po wstawieniu do drugiego mamy:  $\rho q \frac{du}{dx'} = \rho g h \sin \alpha - \frac{dh}{dx'} \rho g h \cos \alpha$

gdzie:  $q = u \cdot h \cdot 1$  - objętościowe natężenie przepływu w warstwie

co prowadzi do:  $-q^2 \frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx'} = gh \sin \alpha - gh \frac{dh}{dx'} \cos \alpha$

Można to przekształcić do postaci: 
$$\frac{dh}{dx'} = \frac{-\sin \alpha}{\left(\frac{q^2}{gh^3 \cos \alpha} - 1\right) \cos \alpha}$$

Widać, że istnieje osobliwość przy wartości krytycznej  $h$  równej:

$$h_{kr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g \cos \alpha}}$$

Wyrażenie w mianowniku można zapisać w innej formie:

$$\frac{q^2}{gh^3 \cos \alpha} = \frac{u^2 h^2}{gh^3 \cos \alpha} = \left(\frac{u}{\sqrt{gh \cos \alpha}}\right)^2 = Fr^2$$

Czyli: 
$$\frac{dh}{dx'} = \frac{-\sin \alpha}{(Fr^2 - 1) \cos \alpha} = \frac{I}{(1 - Fr^2) \cos \alpha}$$
 gdzie  $I$  – spadek niwelacyjny

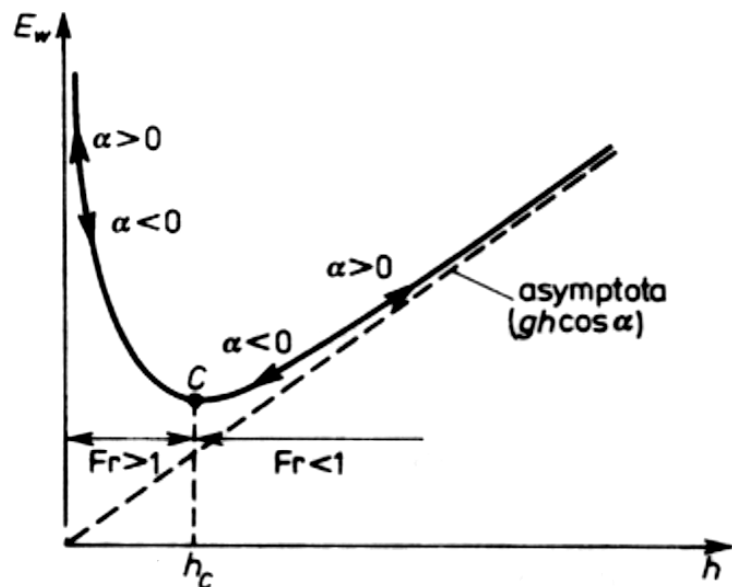
Dla  $Fr=1$  mamy prędkość krytyczną:  $u_{kr} = \sqrt{gh_{kr} \cos \alpha}$

Możliwe przypadki spływu warstwy cieczy można podzielić na podkrytyczne ( $Fr < 1$ ) – czyli **ruch spokojny** i nadkrytyczne ( $Fr > 1$ ) – czyli **ruch rwący**.

W zależności od rodzaju przepływu inaczej zmienia się grubość warstwy cieczy wzdłuż pochylonej płaszczyzny:

Spadek dna	Ruch spokojny $Fr < 1$	Ruch rwący $Fr > 1$
Pochylenie zstępujące $\alpha > 0$	Wzrost $h$ $\frac{dh}{dx'} > 0$	Spadek $h$ $\frac{dh}{dx'} < 0$
Pochylenie wstępujące $\alpha < 0$	Spadek $h$ $\frac{dh}{dx'} < 0$	Wzrost $h$ $\frac{dh}{dx'} > 0$

Analiza równania energii dla przypadku spływu warstwy cieczy o jednostkowej szerokości po nachylonej płaszczyźnie prowadzi do następującej zależności dla tzw. energii właściwej:



$$E_w = \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha = \frac{q^2}{2h^2} + gh \cos \alpha$$

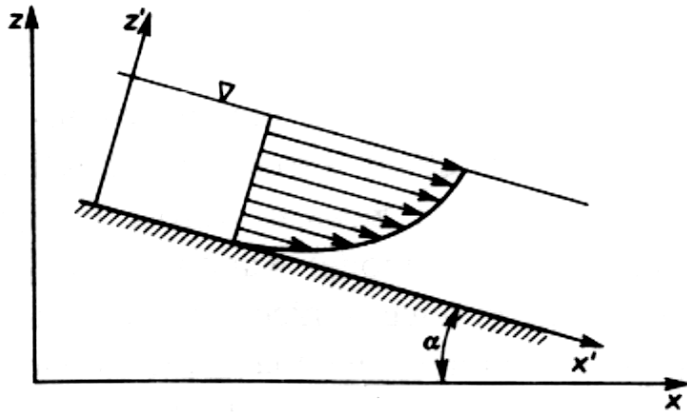
Warunek zachowania energii właściwej:

$$\frac{dE_w}{dx'} = g \sin \alpha$$

Z postaci tej zależności wynika, że dla przepływu o nachyleniu zstępującym energia właściwa zawsze rośnie, a dla przepływu o nachyleniu wstępującym – zawsze maleje.

Energia właściwa osiąga minimum przy krytycznej grubości warstwy cieczy odpowiadającej  $Fr=1$ .

## Laminarny przepływ ciecży rzeczywistej (lepkiej)



W takim przypadku możliwe jest uzyskanie rozwiązania analitycznego równania zachowania pędu, które ma postać:

$$0 = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}$$

Warunki brzegowe:  $u = 0$  dla:  $z' = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = 0 \quad \text{dla: } z' = h$$

Rozwiązanie prowadzi do następujących zależności:

Profil prędkości: 
$$u(z') = -\frac{1}{2} \frac{g}{\nu} \sin \alpha \cdot z'(2 \cdot h - z')$$

Prędkość średnia: 
$$\tilde{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z') dz' = \frac{1}{3} \frac{gh^2 \sin \alpha}{\nu}$$

Prędkość maksymalna: 
$$u_{\max} = \frac{1}{2} \frac{gh^2 \sin \alpha}{\nu} > \tilde{u}$$

**Wniosek:** prędkość przepływu jest proporcjonalna do kwadratu grubości warstwy cieczy, czyli: prędkość przepływu w kanale otwartym rośnie ze wzrostem stopnia napełnienia kanału.

Ważność rozwiązania dla przepływu laminarnego jest ograniczona do zakresu wartości liczby Reynoldsa poniżej około 2000, czyli:

$$\frac{u_{\max} \cdot h}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{gh^3 \sin \alpha}{\nu^2} < 2000 \rightarrow h < \frac{0,74 \cdot 10^{-3}}{\sqrt[3]{\sin \alpha}}$$

Z powyższego wzoru wynika, że przepływ laminarny w warstwie spływającej po ścianie pionowej wystąpi przy grubościach warstwy mniejszych od 0,74 [mm], a na ścianie prawie poziomej (nachylonej pod kątem 1 stopnia) przy grubościach mniejszych od 2,85 [mm]. W rzeczywistych ciekach z reguły występują przepływy turbulentne o w pełni rozwiniętym profilu prędkości.

## Turbulentny przepływ ciecży rzeczywistej (lepkiej)

W przypadku w pełni rozwiniętego przepływu turbulentnego w kanale o stałym nachyleniu parametry przepływu nie zmieniają się wzdłuż strumienia. Energia potencjalna ciecży jest zamieniana na energię wewnętrzną (cieplną) ciecży na skutek działania sił tarcia ciecży o ścianki kanału. Nie ma natomiast zamiany energii potencjalnej na energię kinetyczną płynącej ciecży.

$$0 = \rho g S \sin \alpha - p_{\tau} C \qquad e_2 - e_1 = \Delta e = \frac{p_{\tau} \cdot l}{\rho \cdot R_H}$$

gdzie:  $l$  – długość odcinka pomiędzy przekrojami 1 i 2

$p_{\tau}$  - naprężenia lepkościowe na ściance kanału

$R_H = S/C$  - promień hydrauliczny kanału

W takiej sytuacji istnieje związek pomiędzy spadkiem niwelacyjnym (który jest równy w tym przypadku spadkowi hydraulicznemu) a naprężeniami lepkościowymi:

$$I = I_H = \frac{p_{\tau}}{\rho g R_H}$$



## Wyznaczanie oporów tarcia w kanałach

Z analizy przepływu w kanale o chropowatych ściankach można wyprowadzić przybliżoną zależność na średnią prędkość przepływu:

$$\tilde{u} = C' \sqrt{I \cdot R_H}$$

gdzie:  $C' [\sqrt{m}/s]$  - wymiarowy współczynnik, określony np. według zależności:

$$C' = \frac{1}{n} R_H^{1/6}$$

$n=0,009$  dla powierzchni gładkich (glazura)

$n=0,012$  dla rur czystych i wygładzonego betonu

$n=0,014$  dla ściany z betonu

$n=0,018$  dla kanału ziemnego z warstwą ilastą

$n=0,04$  dla kanału ziemnego bardzo źle utrzymanego

## Przykład

Objętościowe natężenie przepływu w prostokątnym kanale betonowym ( $n=0,014$ ) o szerokości  $B=4,0$  [m] wynosi  $Q=5,0$  [ $m^3/s$ ]. Obliczyć krytyczne parametry przepływu w tym kanale

Warunek przepływu krytycznego ma postać:

$$\frac{q^2}{gh_{kr}^3 \cos \alpha} - 1 = 0 \rightarrow \frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \rightarrow h_{kr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{5,0^2}{4,0^2 \cdot 9,81}} = 0,54 [m]$$

gdzie  $A$  – pole przekroju przepływu:  $A = B \cdot h_{kr}$

$$\text{Prędkość krytyczna: } u_{kr} = \frac{Q}{B \cdot h_{kr}} = \frac{5,0}{4,0 \cdot 0,54} = 2,31 [m/s]$$

Krytyczny spadek hydrauliczny:

$$u_{kr} = C' \sqrt{I_{kr} \cdot R_H} = \frac{1}{n} R_H^{1/6} \sqrt{I_{kr} \cdot R_H} \rightarrow I_{kr} = \frac{u_{kr}^2 n^2}{(R_H)^{4/3}} = 0,0033$$

## Przepływy niestacjonarne w kanałach otwartych

W przepływach w kanałach otwartych często występują zjawiska niestacjonarne, przede wszystkim związane z układami falowymi tworzącymi się na swobodnej powierzchni cieczy.

Najprostszy przypadek dotyczy rozprzestrzeniania się t. zw. małych zaburzeń na swobodnej powierzchni. Można wtedy pominąć siły lepkości i zlinearyzować równania ruchu cieczy. Do dyspozycji mamy równanie zachowania masy:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

oraz równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

W przypadku małych zaburzeń grubości warstwy i prędkości:

$$h = h_0 + h'(t, x)$$

$$h' \ll h_0$$

$$u = u_0 + u'(t, x)$$

$$u' \ll u_0$$

można po ich podstawieniu zlinearyzować równania do postaci:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać:

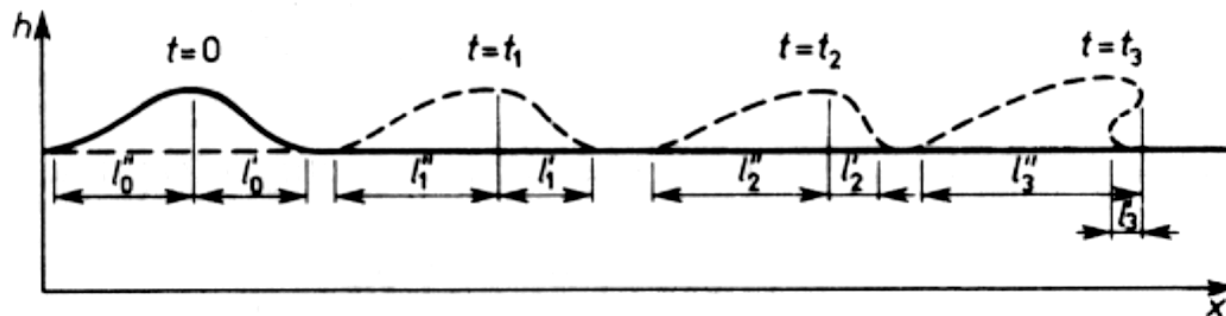
$$h' = h' \left[ x - \left( u_0 \pm \sqrt{gh_0} \right) \cdot t \right] \qquad u' = u' \left[ x - \left( u_0 \pm \sqrt{gh_0} \right) \cdot t \right]$$

Z postaci rozwiązania wynika, że małe zaburzenia rozchodzą się z prędkością charakterystyczną  $\sqrt{gh_0}$  w dodatnim i ujemnym kierunku osi  $x$  bez zmiany kształtu początkowego określonego w warunkach początkowych  $h'(0, x)$  oraz  $u'(0, x)$

W przypadku zaburzeń o znacznej, skończonej amplitudzie linearyzacja równań ruchu cieczy nie jest możliwa. Rozwiązanie układu równań nieliniowych prowadzi do bardziej złożonych zależności opisujących rozprzestrzenianie się takich zaburzeń.

$$h = h_0 \left[ x - 2\sqrt{gh_0} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{h}{h_0} - 1} \right) \cdot t \right]$$

Powyższy wzór opisuje rozprzestrzenianie się zaburzenia  $h$  w dodatnim kierunku osi  $x$ . Należy zauważyć, że w tym przypadku prędkość rozchodzenia się zaburzenia jest proporcjonalna do pierwiastka z jego amplitudy. Prowadzi to deformowania się zaburzenia jak na rysunku.



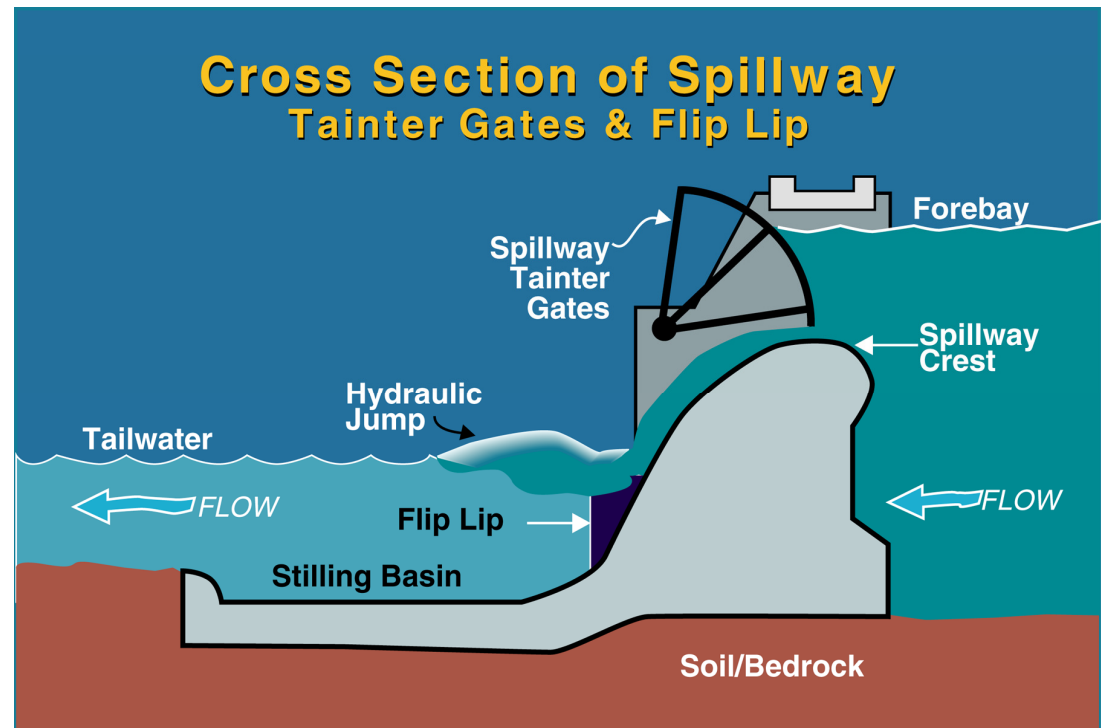
Czoło fali staje się coraz bardziej strome, a tył coraz bardziej rozmyty. W efekcie dochodzi do załamania fali, które w przepływie w kanale ma postać tzw. odskoku hydraulicznego. Należy pamiętać, że w prostym modelu przepływu jednowymiarowego pomijamy efekty dyssypacji związane z tarciem wewnętrznym cieczy i efekty dyspersji, związane z bezwładnością cieczy w ruchu falowym.

## Odskok hydrauliczny

Odskok hydrauliczny jest złożonym zjawiskiem niestacjonarnym występującym w przepływach nadkrytycznych.



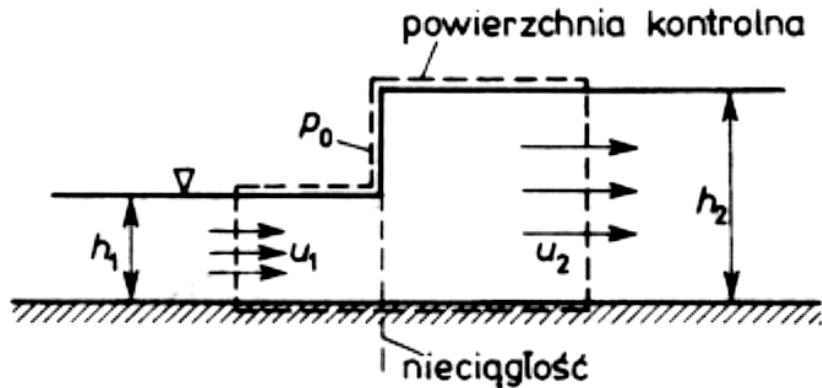
Odskok hydrauliczny polega na nagłym zwiększeniu grubości warstwy płynącej cieczy. Można go łatwo wytworzyć w każdej umywalce.



# Przykłady odskoków hydraulicznych



## Prosta analiza teoretyczna odskoku hydraulicznego



Równanie zachowania masy:

$$\rho h_1 u_1 = \rho h_2 u_2 = m$$

Równanie zachowania pędu:

$$p_1 = p_0 + \rho g (h_1 - z)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g (h_2 - z)$$

w kierunku pionowym

$$m(u_2 - u_1) = \int_0^{h_1} p_1 dz - \int_0^{h_2} p_2 dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 dz$$

w kierunku poziomym

Po podstawieniu ciśnień i wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2$$

Jeśli podstawimy:  $u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2}$        $u_1 = Fr_1 \cdot \sqrt{g h_1}$



to otrzymamy: 
$$\left[ \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2 \cdot Fr_1^2 \right] \left( \frac{h_2}{h_1} - 1 \right) = 0$$

Równanie to ma trzy rozwiązania, ale fizycznie realne jest tylko jedno:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1}{2}$$

Rozwiązanie to oznacza, że:

dla:  $Fr_1 = 1$  jest  $h_2 = h_1$

dla:  $Fr_1 > 1$  jest  $h_2 > h_1$  oraz  $Fr_2 < 1$

dla:  $Fr_1 < 1$  jest  $h_2 < h_1$

Wynika z tego, że odskok hydrauliczny jest możliwy tylko w przepływie nadkrytycznym. Analiza równania energii prowadzi do wniosku, że w odskoku następuje wyraźne zwiększenie energii wewnętrznej cieczy na skutek bardzo silnych procesów dyssypacyjnych.

Wielkość straty energii cieczy na skutek dyssypacji w odskoku hydraulicznym można wyznaczyć według następującej zależności:

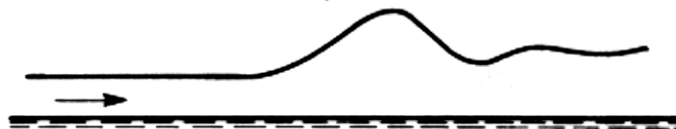
$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{\left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 3\right)^3}{8\left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1\right)\left(\sqrt{Fr_1^2 + 2}\right)}$$

Odskoki hydrauliczne mogą być wywoływane celowo, dla następujących powodów:

- rozpraszanie energii mechanicznej strumienia
- podniesienie poziomu cieczy
- wymieszanie dodatków do cieczy
- napowietrzanie cieczy

# Postać odskoku zależy od wartości liczby Froude'a

a) odskok zafalowany,  $Fr=1+1,8$



$$\frac{h_2}{h_1} = 1 \leftrightarrow 2$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} < 0,05$$

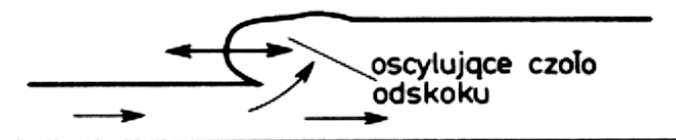
b) odskok słaby,  $Fr=1,8+2,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 2 \leftrightarrow 3,1$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,05 \leftrightarrow 0,15$$

c) odskok oscylujący,  $Fr=2,5+4,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 3,1 \leftrightarrow 5,9$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,15 \leftrightarrow 0,45$$

d) odskok stacjonarny, silny,  $Fr > 4,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 5,9 \leftrightarrow 12$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,45 \leftrightarrow 0,70$$

## Przykład

W kanale o głębokości  $h=1,0$  [m] wywołano przepływ o prędkości średniej  $u=5,0$  [m/s]. Czy wystąpi w tym przepływie odskok hydrauliczny? Jeżeli tak, to jaka będzie głębokość wody za odskokiem? Jak będzie tam prędkość przepływu?

## Rozwiązanie

$$Fr_1 = \frac{u}{\sqrt{gh}} = \frac{5,0}{\sqrt{9,81 \cdot 1,0}} \approx 1,6 > 1 \quad \text{Wystąpi odskok zafalowany}$$

$$h_2 = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1}{2} = 1,0 \frac{\sqrt{1,0 + 8 \cdot 1,6^2} - 1,0}{2} \approx 1,36 [m]$$

$$u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2} = 5,0 \frac{1,0}{1,36} \approx 3,68 [m/s]$$