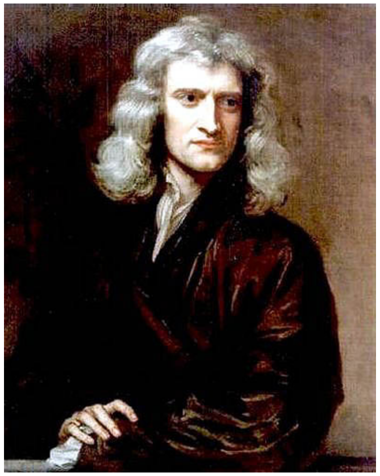
J. Szantyr - Wykład 9 – Równanie zachowania pędu 1

Druga zasada dynamiki Newtona: prędkość przyrostu pędu elementu płynu jest równa sumie sił zewnętrznych działających na ten element

$$\frac{D(m\overline{u})}{Dt} = \sum \overline{F}$$

Isaac Newton
1643 - 1727



Prędkość przyrostu pędu elementu płynu (czyli lewa strona równania) jest określona poprzez pochodną materialną jego prędkości:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u\overline{u})$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v\overline{u})$$

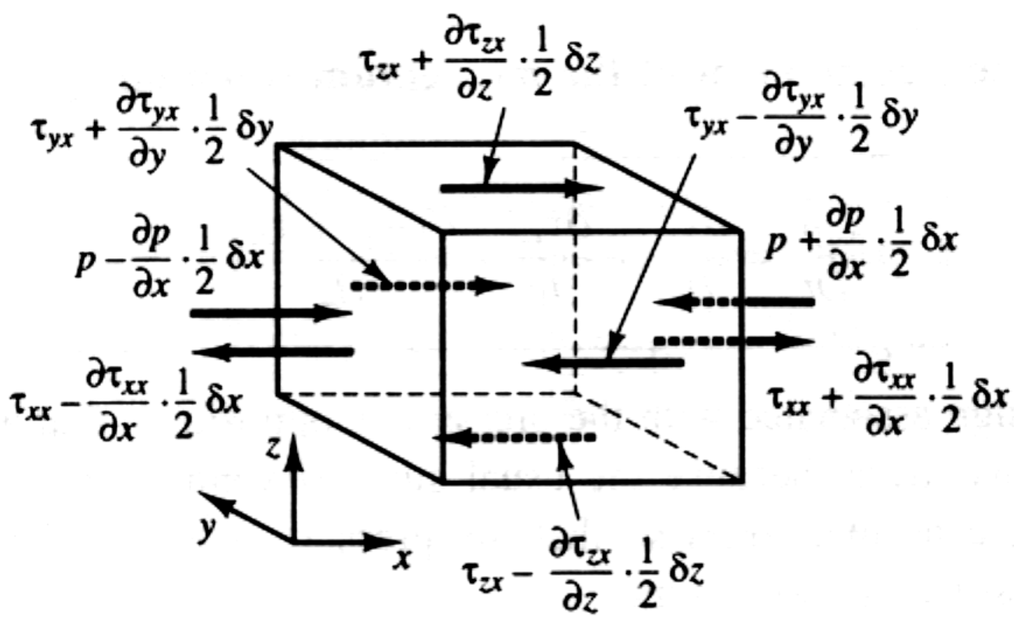
$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w\overline{u})$$

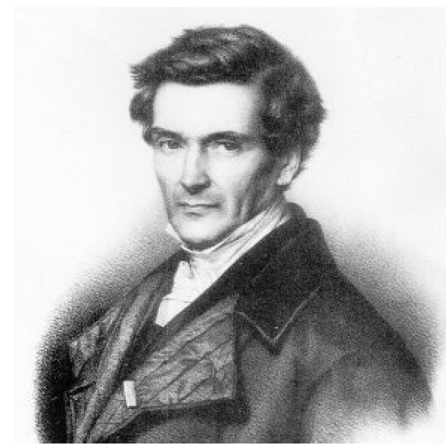
Prawą stronę równania tworzą dwie kategorie sił:

-siły powierzchniowe (siły ciśnienia i siły lepkości),

-siły masowe (siły ciężkości, siły Coriolisa, siły elektromagnetyczne)

Dla przykładu utworzymy kompletne równanie dla kierunku x, posługując się układem sił powierzchniowych jak na rysunku:





Gaspard Coriolis
1792 - 1843

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku x

$$\left[\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)-\left(\tau_{xx}-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z+\left[-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)+\left(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z=$$

$$=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right)\delta x\delta y\partial z$$

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku y

$$-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku z

$$-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

Po dodaniu powyższych wyrażeń i podzieleniu stronami przez objętość elementu otrzymujemy siły powierzchniowe na kierunku x

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

Po uzupełnieniu o składową jednostkowej siły masowej f i podstawieniu do wyjściowej zależności otrzymujemy:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x+\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

i analogicznie dla pozostałych kierunków:

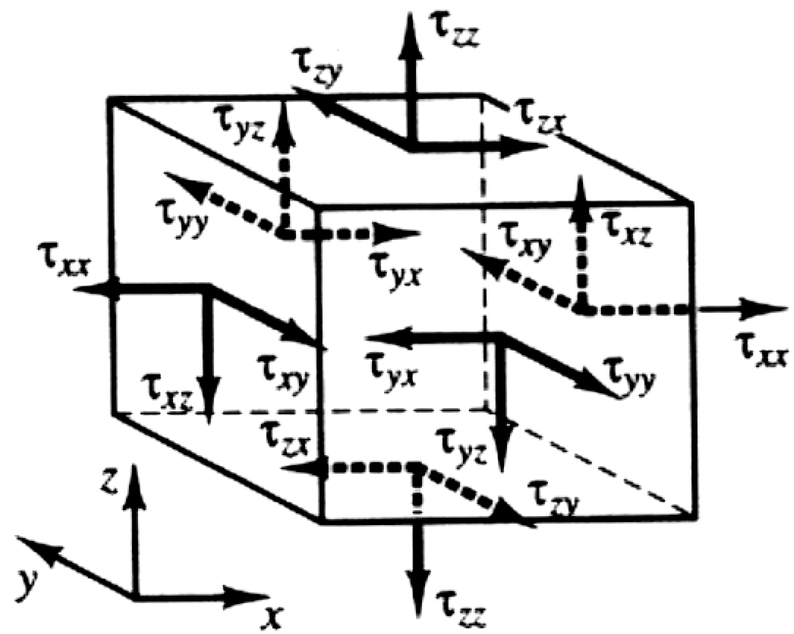
$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f_y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial(-p+\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho f_z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial(-p+\tau_{zz})}{\partial z}$$

Trzy powyższe równania skalarne mogą być zapisane w postaci jednego równoważnego równania wektorowego:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f} + div[P]$$

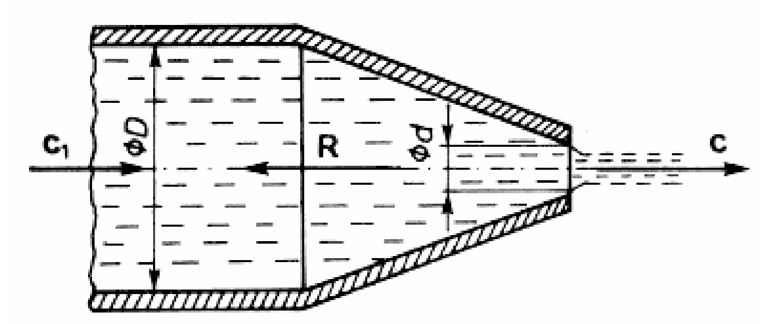
gdzie: $[P]$ jest tensorem opisującym stan naprężenia w płynie pokazany na rysunku, poszerzony o ciśnienie dodane do naprężeń normalnych



Niewiadomymi w równaniach zachowania pędu są: ciśnienie, składowe prędkości oraz naprężenia reprezentujące powierzchniowe siły lepkości. Nawet po dołączeniu równania zachowania masy liczba niewiadomych znacznie przekracza liczbę równań. Aby zredukować liczbę niewiadomych konieczne jest wprowadzenie odpowiedniego modelu płynu.

Przykłady zastosowania zasady zachowania pędu do rozwiązywania prostych zadań z mechaniki płynów

Przykład 1



Z dyszy o średnicach D=80 [mm] i d=20 [mm] wypływa woda ze średnią prędkością c=15 [m/s]. Pomijając różnicę ciśnień obliczyć reakcję hydrodynamiczną wywieraną przez strumień wody na dyszę.

Reakcja R w ruchu ustalonym wynosi:

$$R = \rho \cdot Q \cdot \left(c - c_1\right)$$

Natężenie przepływu Q oraz prędkość c1 obliczamy z równania ciągłości:

$$Q = c \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = c_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

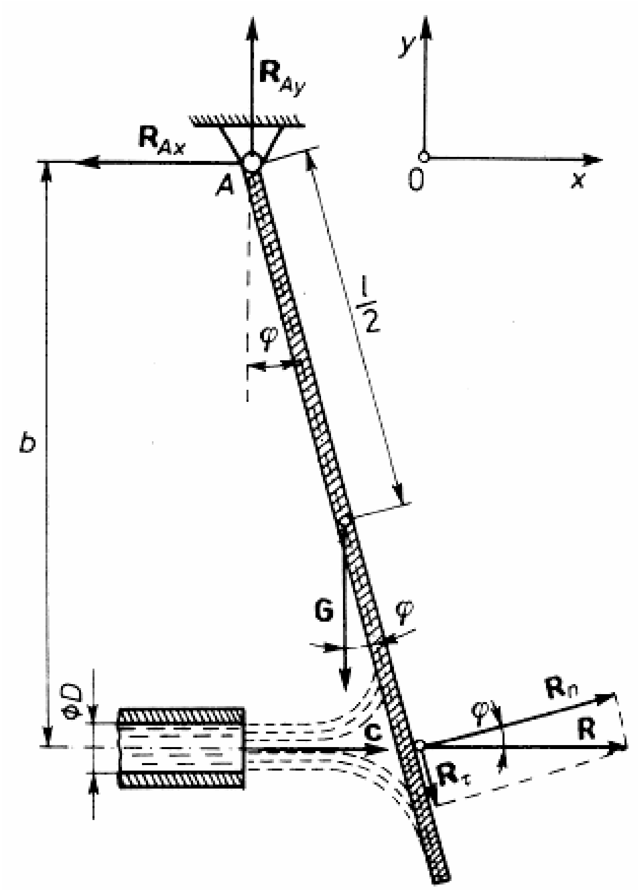
Wobec tego mamy:

$$Q = c \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad c_1 = c \cdot \frac{d^2}{D^2} \qquad R = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$R = 1000 \cdot 15^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{0{,}02^2}{0{,}08^2}\right) = 66{,}25[N]$$

Przykład 2



Strumień cieczy doskonałej o gęstości ρ wypływa z dyszy i uderza w idealnie gładką płytę o ciężarze G i długości l. Płyta może obracać się wokół łożyska A oddalonego o b od osi dyszy. Wiedząc, że natężenie wypływającego strumienia wynosi Q, a średnica dyszy D, wyznaczyć składowe reakcji w łożysku oraz kąt φ o jaki wychyli się płyta w stanie równowagi.

Napór hydrodynamiczny R rozkładamy na składową normalną i składową styczną do płaszczyzny płyty:

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau$$

W cieczy doskonałej składowa styczna jest równa zero, wobec czego całkowity napór reprezentuje tylko składowa normalna:

$$R_n = R \cdot \cos\varphi$$

Dalej mamy:

$$R = \rho \cdot c \cdot Q$$

$$c = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \qquad R_n = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi$$

Składowe reakcji w łożysku wyznaczamy z równań rzutów sił na osie x i y:

$$\sum P_{ix} = R_n \cdot \cos\varphi - R_{Ax} = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - G - R_n \cdot \sin\varphi = 0$$

Skąd otrzymujemy:

$$R_{Ax} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos^2\varphi$$

$$R_{Ay} = G + \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = G + \frac{2 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \sin 2\varphi$$

Kąt nachylenia płyty w stanie równowagi wyznaczamy z równania momentów względem punktu A:

$$\sum M_A = R_n \cdot \frac{b}{\cos\varphi} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

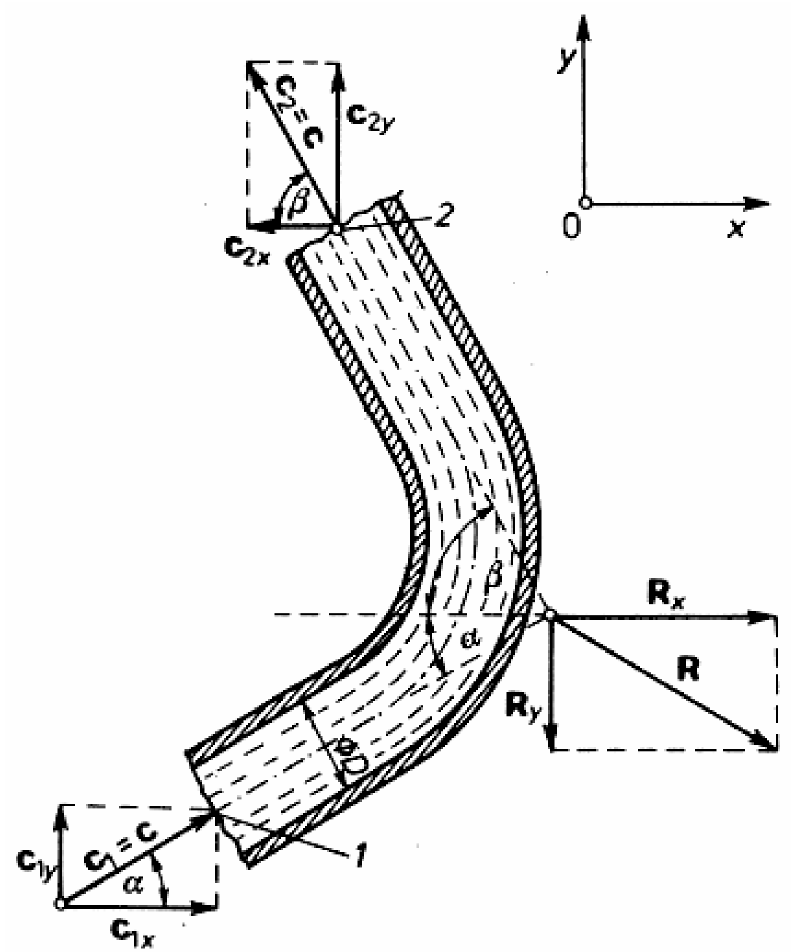
Otrzymujemy:

$$\sin\varphi = \frac{2 \cdot R_n \cdot b}{G \cdot l \cdot \cos\varphi}$$

Po podstawieniu zależności na reakcję mamy ostatecznie:

$$\varphi = \arcsin\frac{8 \cdot \rho \cdot Q^2 \cdot b}{\pi \cdot G \cdot l \cdot D^2}$$

Przykład 3



Przez krzywak o średnicy D=80 [mm] przepływa woda z natężeniem Q=0,08 [m3/s]. Pomijając straty obliczyć napór strumienia wody na krzywak. Część dopływowa krzywaka usytuowana jest pod kątem $\alpha=\pi/6$ do poziomu, a część odpływowa pod kątem $\pi/3$. W przekroju dopływowym i odpływowym panuje jednakowe ciśnienie otoczenia p_b.**

Składowe naporu hydrodynamicznego wynoszą odpowiednio:

$$R_x = \rho \cdot Q \cdot \left(c_{1x} - c_{2x}\right)$$

$$R_y = \rho \cdot Q \cdot \left(c_{1y} - c_{2y}\right)$$

Gdzie:

$$c_{1x} = c \cdot \cos\alpha \qquad c_{2x} = -c \cdot \cos\beta$$

$$c_{1y} = c \cdot \sin\alpha \qquad c_{2y} = c \cdot \sin\beta$$

Co daje:

$$R_x = \rho \cdot Q \cdot c \cdot \left(\cos\alpha + \cos\beta\right)$$

$$R_y = \rho \cdot Q \cdot c \cdot \left(\sin\alpha - \sin\beta\right)$$

Po podstawienie:

$$c = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Otrzymujemy:

$$R_x = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot (\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$R_y = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot (\sin\alpha - \sin\beta)$$

Napór wypadkowy wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \sqrt{2 \cdot [1 + \cos(\alpha + \beta)]}$$

Suma kątów wynosi: $$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

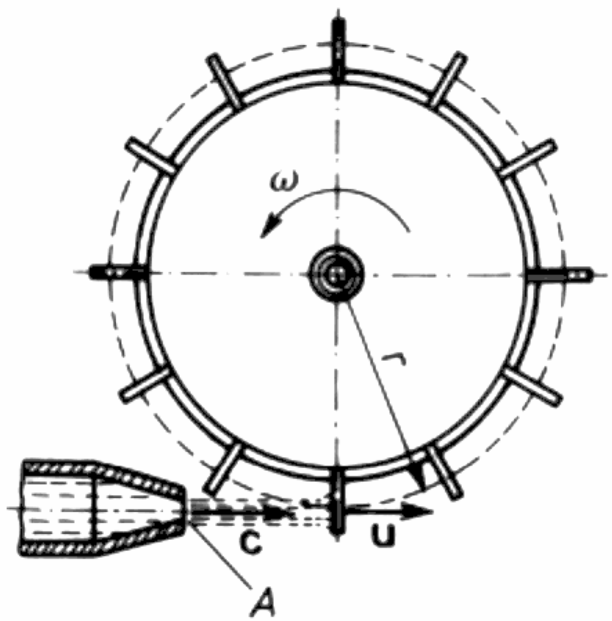
Wobec czego mamy:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\rho\cdot Q^2}{\pi\cdot D^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 0{,}08^2}{3{,}1415\cdot 0{,}08^2}=1802[N]$$

Przykład 4



Strumień wody o natężeniu q=0,01 [m**3/s] wypływa z dyszy i uderza w płaskie łopatki koła wodnego o promieniu podziałowym r=1,0 [m]. Pomijając straty, obliczyć moc użyteczną oraz sprawność koła, jeżeli jego prędkość kątowa wynosi ω=5,0 [1/s], a pole przekroju poprzecznego dyszy A=500 [mm**2]. Dla jakiej prędkości obrotowej ω koło osiągnie moc maksymalną?

Moc użyteczną koła wodnego określa zależność:

$$N_u = M \cdot \omega$$

Gdzie moment M wynika z zasady krętu:

$$M = \rho \cdot Q \cdot (c - u) \cdot r$$

Czyli: $$N_u = \rho \cdot Q \cdot (c - u) \cdot \omega \cdot r$$

Gdzie z kolei mamy: $u = \omega \cdot r \qquad c = Q/A$

Co daje: $$N_u = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right) \cdot \omega \cdot r$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$N_u = 1000 \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{0{,}01}{0{,}0005} - 5 \cdot 1 \right) \cdot 5 \cdot 1 = 750 [W]$$

Z kolei moc doprowadzona do koła wyraża się wzorem:

$$N_d = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

Gdzie wysokość rozporządzalna H wynosi: $H = \dfrac{c^2}{2 \cdot g}$

A ponadto: $c = Q / A$

Co daje:

$$N_d = \frac{\rho \cdot Q^3}{2 \cdot A^2} = \frac{1000 \cdot 0{,}01^3}{2 \cdot 0{,}0005^2} = 2000 [W]$$

Sprawność koła wynosi więc: $$\eta = \frac{N_u}{N_d} = \frac{750}{2000} = 0{,}375$$

W celu wyznaczenia prędkości kątowej odpowiadającej maksymalnej mocy koła należy równanie na moc użyteczną przekształcić i zróżniczkować względem prędkości kątowej

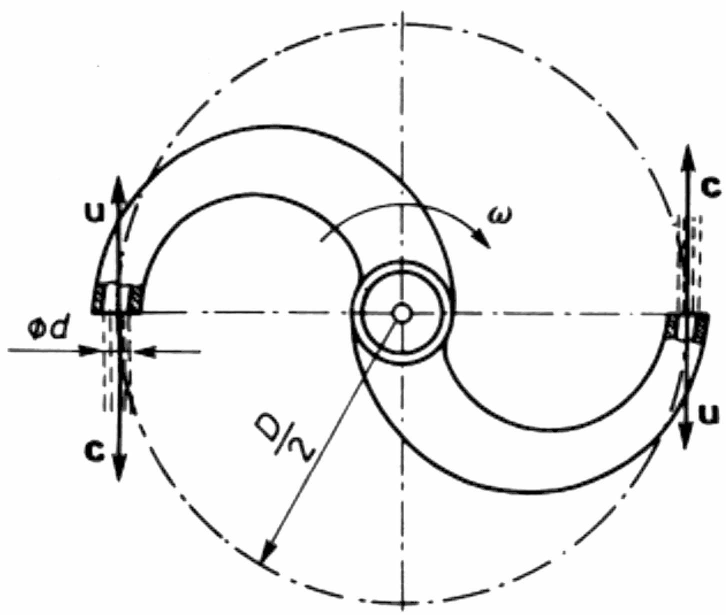
$$N_u = \rho \cdot c \cdot A \cdot (c - \omega \cdot r) \cdot \omega \cdot r = \rho \cdot A \cdot r \cdot (c^2 \cdot \omega - c \cdot \omega^2 \cdot r)$$

$$\frac{\partial N_u}{\partial \omega} = \rho \cdot A \cdot r \cdot (c^2 - 2 \cdot c \cdot \omega \cdot r) = 0$$ **Warunek ekstremum**

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\omega = \frac{c}{2 \cdot r} = \frac{Q}{2 \cdot r \cdot A} = \frac{0{,}01}{2 \cdot 1 \cdot 0{,}0005} = 10 \left[1/s \right]$$

Przykład 5



Do koła Segnera o średnicy D doprowadzona jest woda, której natężenie przepływu wynosi Q. Pomijając opory tarcia oraz straty przepływu wyznaczyć prędkość kątową wirowania ω. Przyjąć średnicę dysz wylotowych równą d. Założyć, że wypadkowy moment na kole jest równy zero.

Koło Segnera obraca się w kierunku przeciwnym do wypływu wody, wobec czego absolutna prędkość wypływu c wynosi:

$$c = w - u$$

Gdzie: $u = \omega \cdot \dfrac{D}{2}$ $\qquad w = \dfrac{0{,}5 \cdot Q \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \dfrac{2 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$

Moment reakcji hydrodynamicznej z zasady krętu wynosi:

$$M = \rho \cdot Q \cdot \frac{D}{2} \cdot c = \rho \cdot Q \cdot \frac{D}{2} \cdot (w - u)$$

Ponieważ pomijamy opory tarcia musi być M=0, co daje:

$$w - u = 0 \rightarrow w = u$$

Po podstawieniu do powyższego zależności na prędkości w i u otrzymujemy:

$$\frac{2 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \omega \cdot \frac{D}{2} \rightarrow \omega = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2 \cdot D}$$