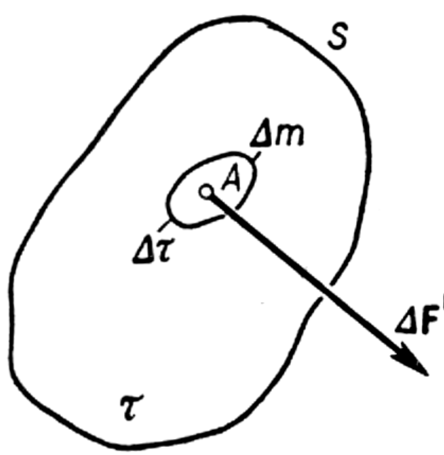
J. Szantyr - Wykład 3 – Równowaga płynu

Siły wewnętrzne – wzajemne oddziaływania elementów mas wydzielonego obszaru płynu, siły o charakterze powierzchniowym, znoszące się parami.

Siły zewnętrzne – wynik oddziaływania mas nie należących do wydzielonego obszaru płynu – dzielimy je na siły masowe i siły powierzchniowe.

Siły masowe obejmują każdy element płynu i są proporcjonalne do jego masy.

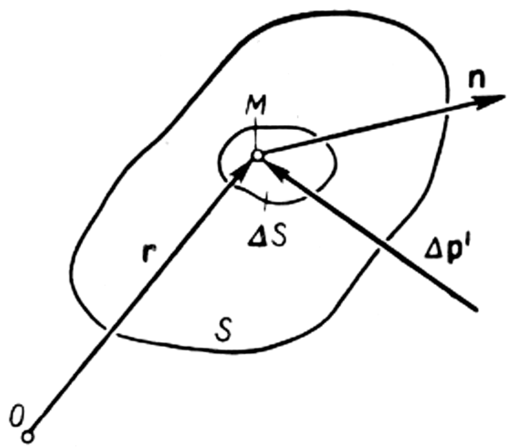


$$\overline{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \overline{F'}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{\Delta \overline{F'}}{\Delta \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{dF'}{d\tau}$$

$\overline{F}\left[\frac{m}{s^2}\right]$ jednostkowa siła masowa, np. siła grawitacji czyli przyspieszenie g

$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ gęstość płynu

Siły powierzchniowe działają na powierzchnię obejmującą wydzielony obszar płynu i są proporcjonalne do pola tej powierzchni.



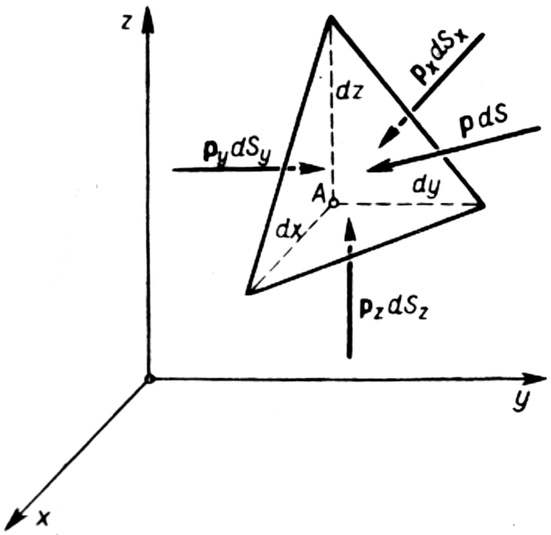
$$\overline{P} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overline{p'}}{\Delta s} = \frac{d\overline{p'}}{ds}$$

$\overline{P}\left[\dfrac{N}{m^2}\right]$ jednostkowa siła powierzchniowa

W ogólnym przypadku siła powierzchniowa zależy od orientacji elementu powierzchni określonej wersorem normalnym *n,* stąd należy ją oznaczać P_n

Płyn jest w równowadze pod działaniem danych sił zewnętrznych jeżeli siły działające na każdą dowolnie ograniczona jego część tworzą układ wektorów równoważny zeru.

W płynie będącym w stanie równowagi ciśnienie w dowolnym punkcie ma wartość stałą i niezależną od orientacji elementu powierzchniowego przechodzącego przez ten punkt.



warunki równowagi czworościanu:

$$p_x dS_x - pdS\cos(\overline{p}, x) = 0$$

$$p_y dS_y - pdS\cos(\overline{p}, y) = 0$$

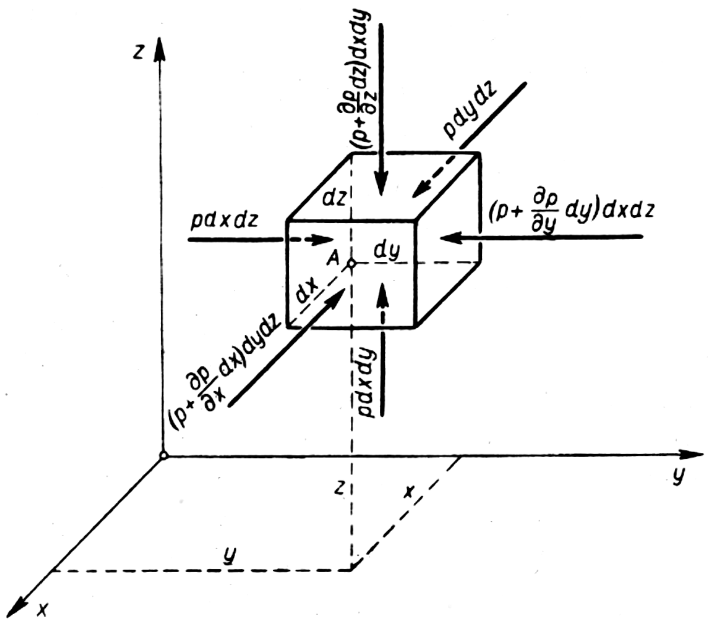
$$p_z dS_z - pdS\cos(\overline{p}, z) = 0$$

ale mamy: $dS_x = dS\cos(\overline{p}, x)$ itd.

$p_x - p = 0; p_y - p = 0; p_z - p = 0$ czyli: $p = p_x = p_y = p_z$

Wniosek: hydrostatyczny stan naprężenia w płynie ma charakter pola skalarnego.

Warunki równowagi płynu



Jednostkowa siła masowa:

$$\overline{F} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k} = \overline{F}(x, y, z)$$

Gęstość:

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

Warunki równowagi elementu płynu:

$$X\rho dxdydz + pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx \right)dydz = 0$$

$$Y\rho dxdydz + pdxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy \right)dxdz = 0$$

$$Z\rho dxdydz + pdxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz \right)dxdy = 0$$

stąd otrzymujemy: $X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$

co prowadzi do podstawowego w hydrostatyce **równania Eulera:**

$$\overline{F} = \frac{1}{\rho}\, gradp$$

lub w postaci różniczkowej:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{dp}{\rho}$$

Leonhard Euler
1707 - 1783

jeżeli pole sił masowych ma potencjał *U*, czyli: $\overline{F} = -gradU$

to otrzymamy: $dU = -\frac{dp}{\rho}$ i po scałkowaniu: $p = -\rho U + C$

Stała całkowania może być wyznaczona ze znanego ciśnienia i potencjału sił masowych w określonym punkcie obszaru płynu.

Na przykład w polu grawitacyjnym w pobliżu Ziemi mamy $X=Y=0$

$Z=-g=-\frac{\partial U}{\partial z}$ czyli: $U=gz$ co daje: $p=-\rho gz+C$

Wniosek: w polu grawitacyjnym Ziemi powierzchnie stałego ciśnienia hydrostatycznego (izobaryczne) są poziome.

Wniosek ogólny: powierzchnie izobaryczne i powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do wektora sił masowych (patrz przykład na końcu wykładu).

Jeżeli przez p_a oznaczymy ciśnienie na swobodnej powierzchni cieczy na wysokości H, to otrzymamy:

$p_a=-\rho gH+C$ co daje: $C=p_a+\rho gH$ i dalej:

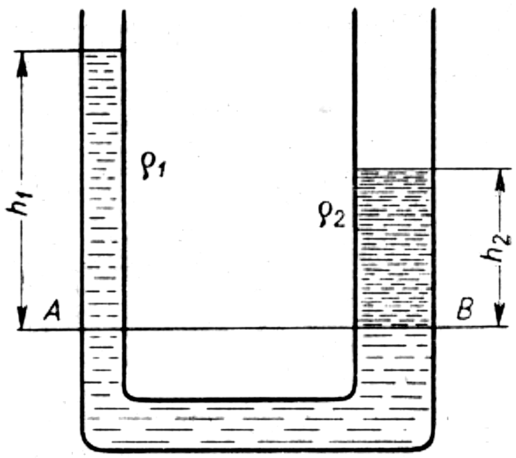
$p=p_a+\rho g(H-z)$ ostatecznie: $p=p_a+\rho gh$ gdzie:

$h=H-z$ – zanurzenie punktu pod swobodną powierzchnią

p_a - ciśnienie na swobodnej powierzchni (np. atmosferyczne)

Przykłady zastosowania

Naczynia połączone – na poziomie A-B mamy:

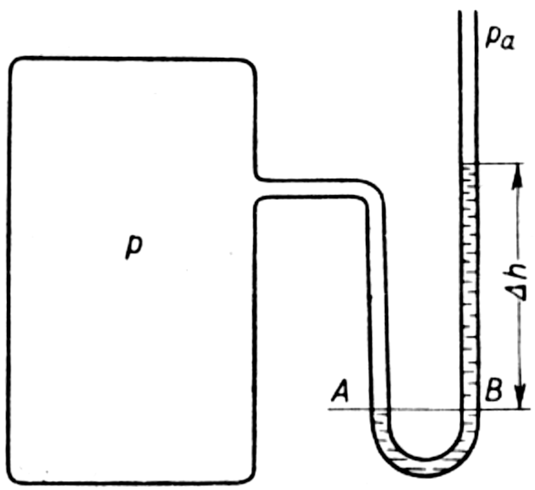


$$p = p_a + \rho_1 g h_1 \qquad p = p_a + \rho_2 g h_2$$

czyli:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$ albo: $$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

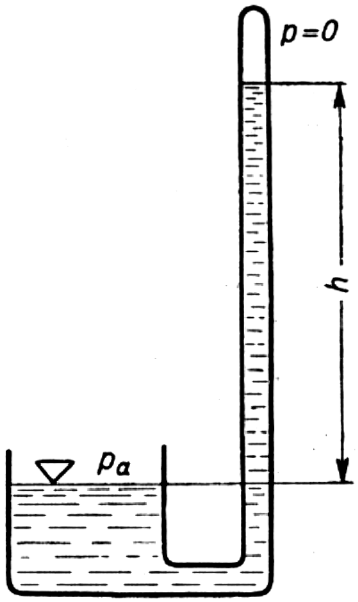
Hydrostatyczny pomiar ciśnienia



$$p_A = p \qquad p_B = p_a + \rho g \Delta h$$

$$p_A = p_B \qquad p - p_a = \rho g \Delta h$$

W ten sposób mierzymy nadciśnienie (ciśnienie względne) w zbiorniku, czyli różnicę pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym *p* a ciśnieniem atmosferycznym.



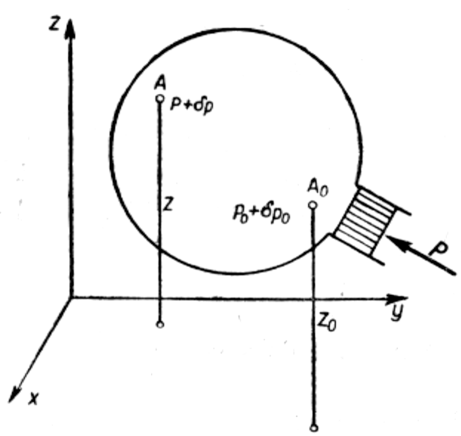
Barometr – pomiar ciśnienia atmosferycznego.

$$p_a = \rho g h$$

Blaise Pascal
1623 - 1662

Prawo Pascala

Przyrost ciśnienia w dowolnym punkcie jednorodnego płynu nieściśliwego znajdującego się w stanie równowagi w potencjalnym polu sił masowych wywołuje zmianę ciśnienia o taką samą wielkość w każdym innym punkcie płynu.



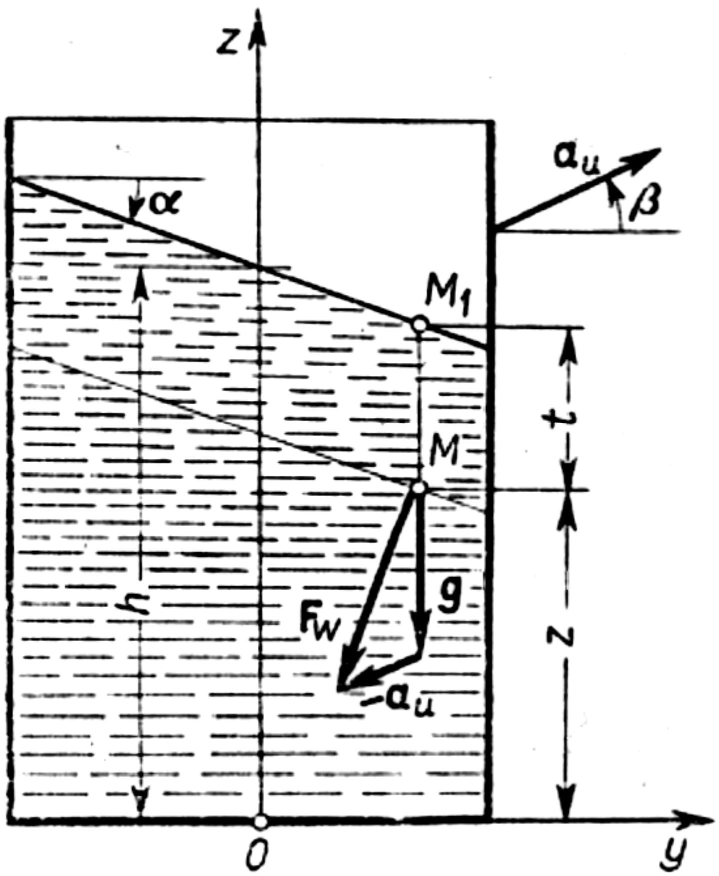
$$p - p_0 = \rho\left(U_0 - U\right)$$

$$p + \delta p - \left(p_0 + \delta p_0\right) = \rho\left(U_0 - U\right)$$

$$\delta p - \delta p_0 = 0$$

$$\delta p = \delta p_0$$

Przykład 1: Wyznaczenie nachylenia swobodnej powierzchni cieczy w naczyniu poruszającym się ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym w dowolnym kierunku.



$\overline{a}_u$ przyspieszenie unoszenia $a = \left|\overline{a}_u\right|$

rzuty jednostkowe siły masowej:

$$X = 0$$
$$Y = -a\cos\beta$$
$$Z = -g - a\sin\beta$$

równania równowagi cieczy:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -a\cos\beta$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g - a\sin\beta$$

czyli: $$\frac{dp}{\rho} = -\left(a\cos\beta dy + a\sin\beta dz + gdz\right)$$

po scałkowaniu przy ρ=*const* otrzymujemy:

$$p = -\rho g\left[\frac{a}{g}y\cos\beta + \left(\frac{a}{g}\sin\beta + 1\right)z\right] + C_1$$

stałą wyznaczamy z ciśnienia na swobodnej powierzchni w punkcie M1:

$$C_1 = p_a + \rho g\left[\frac{a}{g}y\cos\beta + \left(\frac{a}{g}\sin\beta + 1\right)(z+t)\right]$$

po podstawieniu otrzymujemy:

$$p = p_a + \rho g\left(1 + \frac{a}{g}\sin\beta\right)t$$

z kolei równanie powierzchni izobarycznych (stałego ciśnienia p):

$$z = -\frac{\cos\beta}{\frac{a}{g} + \sin\beta} y + C$$

jest to rodzina płaszczyzn nachylonych pod kątem α takim, że:

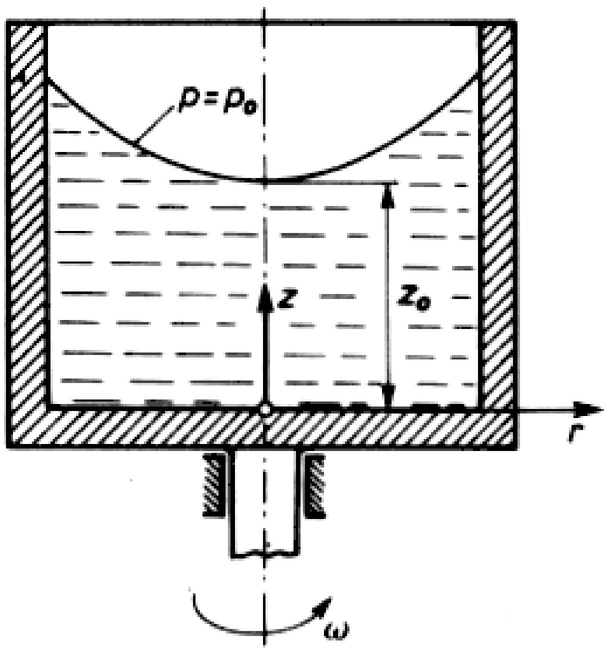
$$tg\alpha = -\frac{\cos\beta}{\frac{a}{g} + \sin\beta}$$

natomiast kąt nachylenia wypadkowej siły masowej φ:

$$tg\varphi = \frac{Z}{Y} = \frac{\frac{a}{g} + \sin\beta}{\cos\beta} = ctg\alpha$$

Wniosek: wypadkowa siła masowa jest prostopadła do powierzchni izobarycznych

Przykład 2: Wyznaczenie zależności opisującej rozkład ciśnienia panującego w zbiorniku obracającym się ze stałą prędkością kątową ω. Zbiornik napełniono cieczą o gęstości ρ, a ciśnienie otoczenia wynosi p.



W cylindrycznym układzie współrzędnych podstawowe równanie hydrostatyki ma postać:

$$\frac{dp}{\rho} = q_r \cdot dr + q_\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta + q_z \cdot dz$$

gdzie człony są odpowiednio równe:

$$q_r = \omega^2 \cdot r$$

$$q_z = -g$$

$$q_\vartheta = 0$$

Po podstawieniu otrzymujemy: $dp = \rho \cdot \left(\omega^2 \cdot r \cdot dr - g \cdot dz\right)$

Całkowanie prowadzi do: $p = \frac{\rho}{2} \cdot \omega^2 \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot z + C$

Dla punktu na powierzchni cieczy w osi naczynia mamy:

$r = 0$ $z = z_0$ $p = p_0$

Czyli stałą całkowania można określić jako: $C = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0$

Ostatecznie rozkład ciśnienia w cieczy opisuje równanie:

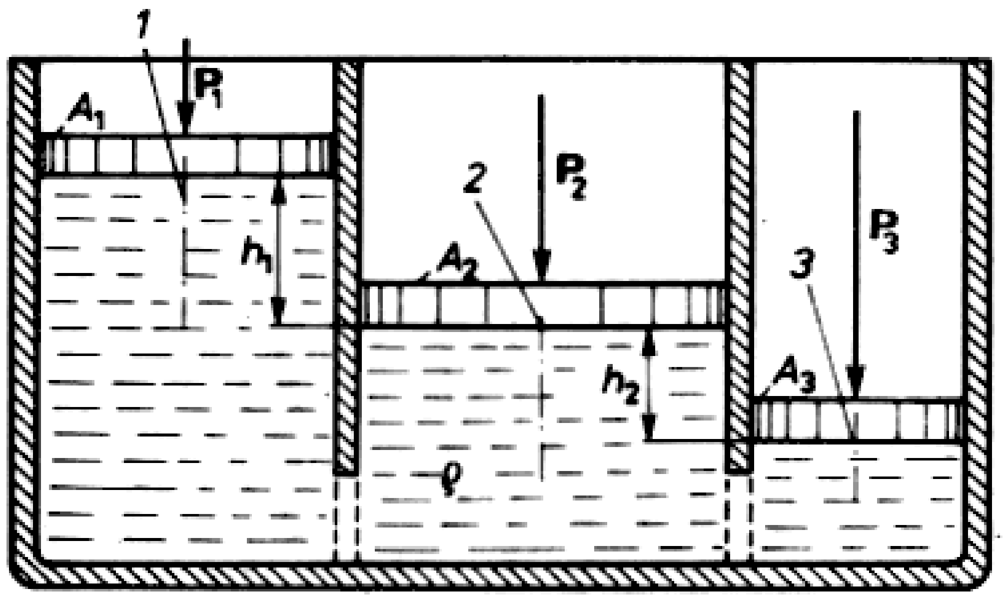
$$p = p_0 - \rho \cdot g \cdot \left(z - z_0\right) + \frac{\rho}{2} \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

Czyli równanie powierzchni swobodnej ma postać:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - g\left(z - z_0\right) = 0$$

Jest to równanie paraboloidy obrotowej.

Przykład 3: Trzy tłoki o powierzchniach A1=0,6 m2, A2=0,8 m**2, A3 0,4 m**2, obciążone odpowiednio siłami P1=1 kN, P2=2 kN i P3=3 kN działają na wodę o gęstości ρ=1000 kg/m**3. Określić na jakich wysokościach h1 i h2 układ tłoków pozostanie w stanie równowagi.**



Ciśnienie pod tłokiem 2 wynosi:

$$\frac{P_1}{A_1} + h_1 \cdot \rho \cdot g = \frac{P_2}{A_2}$$

Ciśnienie pod tłokiem 3 wynosi:

$$\frac{P_2}{A_2} + h_2 \cdot \rho \cdot g = \frac{P_3}{A_3}$$

Z powyższych równań wyznaczamy wysokości:

$$h_1 = \left(\frac{P_2}{A_2} - \frac{P_1}{A_1} \right) \cdot \frac{1}{\rho \cdot g} = 0{,}085[m] \qquad h_2 = \left(\frac{P_3}{A_3} - \frac{P_2}{A_2} \right) \cdot \frac{1}{\rho \cdot g} = 0{,}51[m]$$

Dla sprawdzenia można ułożyć równanie równowagi przekroju 1 względem przekroju 3:

$$\frac{P_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2) = \frac{P_3}{A_3} \rightarrow \frac{1000}{0{,}6} + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}085 + 0{,}51) = \frac{3000}{0{,}4} \rightarrow 7500 = 7500$$