

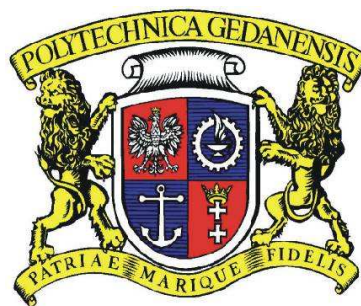
Zastosowanie metod projekcji w algorytmach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej

Michał Wiktor

Rozprawa Doktorska

Politechnika Gdańska

Wydział Elektroniki Telekomunikacji i Informatyki



promotor: prof. dr hab. inż. Michał Mrozowski

Gdańsk 2006

Spis treści

Spis oznaczeń	V
Wstęp	IX
1 Wprowadzenie do Metody Różnic Skończonych	1
1.1 Założenia Metody Różnic Skończonych	2
1.1.1 Dokładność schematów różnicowych	2
1.1.2 Dyskretyzacja zagadnień brzegowych	4
1.2 Jednowymiarowy algorytm czasowy dla równań Maxwella	5
1.3 Macierzowy zapis algorytmu FDTD	7
1.4 Trójwymiarowe sformułowanie na siatce Yee	9
1.5 Macierzowy zapis różnic skończonych	11
1.5.1 Symetryzacja problemu FDTD/FDFD	12
1.6 Metody pokrewne	14
1.6.1 Równanie falowe w dziedzinie częstotliwości	14
1.6.2 Niekartezjańskie układy współrzędnych	15
1.6.3 Rozwinięcia funkcyjne w strukturach jednorodnych	17
2 Metody rzutowe w rozwiązywaniu zagadnień elektromagnetycznych	19
2.1 Definicja Metody Momentów	20
2.1.1 Dobór funkcji bazowych	21
2.1.2 Rzutowanie operatora drugiego rzędu	22
2.2 Metody siatkowe jako szczególny przypadek Metody Momentów	23
2.2.1 Określenie metody siatkowej	24
2.3 Metoda Momentów w dziedzinie czasu	26
2.3.1 Metody siatkowe wykorzystujące falki	27
2.4 Projekcja w przestrzeni \mathcal{R}^n	28
2.4.1 Rzutowanie operatorów w przestrzeni \mathcal{R}^n	29
2.4.2 Algorytmy wykorzystujące rzutowanie w \mathcal{R}^n	29
3 Dyskretna projekcja operatorów różnicowych	31
3.1 Relacja rzutowania w przestrzeni ciągłej i dyskretnej	31
3.1.1 Całkowanie numeryczne w formalizmie macierzowym	33
3.1.2 Budowa bazy w oparciu o znane własności rozwiązania	38
3.2 Projekcja operatorów różnicowych	40
3.2.1 Projekcja równania falowego	40
3.2.2 Układ równań pierwszego rzędu	40

3.3	Problemy definiowane w dziedzinie czasu	41
3.3.1	Stabilność algorytmu czasowego po projekcji	42
3.4	Tworzenie baz ortogonalnych	43
3.5	Budowa problemu drugiego rzędu	44
3.6	Metody siatkowe jako wynik dyskretnej projekcji operatorów różnicowych .	47
3.6.1	Falki Haara	51
3.6.2	Rozszerzenie koncepcji metod siatkowych	53
3.6.3	Falki Battle-Lemarie	56
3.7	Algorytmy hybrydowe	57
3.7.1	Konstrukcja algorytmów hybrydowych w ramach dyskretnej projekcji	58
3.7.2	Klasyczne algorytmy hybrydowe a rzutowanie	59
3.7.3	Inne algorytmy hybrydowe	62
3.8	Wektory bazowe dla wielowymiarowych operatorów	65
3.9	PEE - Szczególny przypadek projekcji wielowymiarowej	68
3.10	Wstęp do hybrydowej analizy wielowymiarowej	71
3.10.1	Rozwiązania pasożytnicze	73
4	Analiza wybranych struktur mikrofalowych	75
4.1	Analizy w dziedzinie częstotliwości	76
4.1.1	Analiza rezonatora z cienką przegrodą metalową	76
4.1.2	Filtr falowodowy z elementami dielektrycznymi	77
4.2	Analiza rezonatorów w dziedzinie częstotliwości w siatce cylindrycznej . . .	79
4.2.1	Dwurodzajowy rezonator dielektryczny	80
4.2.2	Dwurodzajowy rezonator cylindryczny o zakłóconej symetrii osiowej	83
4.2.3	Otwarty rezonator dielektryczny	84
4.3	Analiza odbić na granicy FDTD i rozwinięć funkcyjnych	87
4.4	Analizy w dziedzinie czasu	91
4.4.1	Rezonatory cylindryczne analizowane w dziedzinie czasu.	91
4.4.2	Rezonatory dwurodzajowe analizowane w dziedzinie czasu	92
4.5	Struktury zawierające linie spiralne	95
4.5.1	Rezonator dwurodzajowy o zmniejszonej długości z linią spiralną . .	96
4.5.2	Zamknięta linia TWT na bazie linii spiralnej - badanie charakterystyki dyspersyjnej	98
4.5.3	Przykładowa analiza linii zasilającej rozrusznik serca	100
5	Podsumowanie	109

Spis oznaczeń

Symbole ogólne

Ω	-	dziedzina danego zagadnienia różniczkowo - całkowego
\mathbf{B}	-	macierz \mathbf{B}
$B_{m,n}$	-	element m,n macierzy \mathbf{B}
\mathbf{x}	-	wektor w przestrzeni \mathcal{R}^n
x_n	-	n -ty element wektora \mathbf{x}
\mathcal{B}	-	operator w przestrzeni \mathcal{L}_2
\mathbf{f}	-	funkcja (wektor) w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta.
$\tilde{\mathbf{f}}$	-	przybliżenie funkcji \mathbf{f} .
$\mathbf{f}(x)$	-	funkcja zależna od współrzędnej x
$\mathbf{f}(\mathbf{r})$	-	funkcja zależna od położenia w wielowymiarowej przestrzeni euklidesowej.
\mathbf{f}^n	-	n -ta funkcja (wektor) z ustalonego zbioru
$^x\mathbf{f}$	-	związane z kierunkiem x lub składową x
$^?\mathbf{f}$	-	dowolny z indeksów odnoszący się do \mathbf{f} .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	-	iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	-	inne oznaczenie iloczynu skalarnego, gdzie wymagane jest uproszczenie zapisu
$\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$	-	wersory x, y i z
\mathcal{Z}	-	transformata \mathcal{Z}
\mathcal{Z}	-	zbiór liczb całkowitych
$\mathcal{O}(\cdot)$	-	rzęd dokładności
\mathcal{R}^N	-	przestrzeń Euklidesowa N - wymiarowa

Wielkości fizyczne

c	-	prędkość światła
ε	-	przenikalność elektryczna
μ	-	przenikalność magnetyczna
σ	-	przewodność elektryczna
σ^m	-	przewodność magnetyczna
ε_x, μ_x	-	składowa \mathbf{i}_x przenikalności elektrycznej lub magnetycznej
$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$	-	macierze materiałowe zdefiniowane dla siatki Yee
$\boldsymbol{\sigma}^m$	-	
f	-	częstotliwość

Symbole związane z rozważanymi zagadnieniami

$P^m(x)$	- wielomian Legendre'a m -tego stopnia
δ_n	- delta Kroneckera
$\delta(x)$	- delta Diraca
\mathbf{w}	- wektor testujący
\mathbf{v}	- wektor bazowy
\mathbf{V}	- macierz projekcyjna reprezentująca przestrzeń bazową lub przestrzeń próbek pola elektrycznego
\mathbf{W}	- macierz projekcyjna reprezentująca przestrzeń testującą lub przestrzeń próbek pola magnetycznego
\mathbf{A}	- operator dyskretny drugiego rzędu (Laplasjan)
\mathbf{D}	- operator dyskretny pierwszego rzędu (pochodna)
\mathbf{R}	- macierz rotacji
\mathbf{C}	- unormowana macierz rotacji
\mathbf{I}	- Macierz jednostkowa
\mathbf{I}_M	- Macierz jednostkowa $M \times M$
${}^d\mathbf{L}, {}^d\mathbf{A}$	- macierze uzyskana metodą projekcji Rayleigha-Ritza w przestrzeni dyskretniej
${}^c\mathbf{L}$	- macierz uzyskana metodą projekcji Rayleigha-Ritza w przestrzeni ciągłej
d	- przesunięcie między siatką pierwotną a dualną
E	- pole elektryczne
H	- pole magnetyczne
H_z	- wybrana składowa pola elektrycznego
F	- pomocnicze pole wektorowe
$diag(\mathbf{A})$	- macierz diagonalna, zawierająca tylko główną przekątną \mathbf{A}
${}^{bl}x$	- odnoszące się do falki Battle-Lemarie
lx	- odnoszące się do wielomianów Legendre'a
hx	- odnoszące się do falek Haara
Δt	- krok czasowy symulacji

Wykaz skrótów

FD	- Metoda Różnic Skończonych
FDTD	- Metoda Różnic Skończonych w dziedzinie czasu
FDFD	- Metoda Różnic Skończonych w dziedzinie częstotliwości
MRTD	- Metoda czasowa wykorzystująca falki
PEE	- Częściowe rozwinięcie w funkcje własne (<i>partial eigenfunction expansion</i>)
DPEE	- Częściowe rozwinięcie w funkcje własne uzyskane metodą dyskretniej projekcji
FEM	- Metoda Elementów Skończonych
TWT	- Travelling Wave Tube
HAAR /	- Odnoszące się do falek Haara
Haar	
POLY	- Odnoszące się do wielomianów Legendre'a

it/s	- iteracji na sekundę
nnz	- liczba niezerowych elementów w macierzy
MM	- Metoda dopasowania rodzajów
MV	- Liczba mnożeń macierz - wektor
M	- Mega (10e6)
k	- kilo (10e3)
wzg.	- względny

Nie wprowadza się specjalnego rozróżnienia między funkcją skalarną zależną od zmiennych przestrzennych a polem wektorowym. W obu przypadkach stosuje się do nich formalizm przestrzeni Hilberta. Jeśli konieczne jest podkreślenie faktu, że dana wielkość jest polem wektorowym, zaznaczone jest to przez podanie składowych. Podobnie, jeśli nie jest to konieczne, oznacza się f nie podając argumentów.

Wstęp

Techniki przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowych i brzegowych prawdopodobnie powstały wraz z narodzinami współczesnej fizyki, opartej na rachunku różniczkowym i całkowym. W każdej dziedzinie istnieje bowiem skończona liczba problemów, które można rozwiązać analitycznie, zaś takich, które wymagają użycia metod przybliżonych jest nieskończenie wiele. Zagadnienia elektrodynamiczne nie odbiegają od tego schematu. Istnieje pewna klasa struktur/konfiguracji jak jednorodne falowody, promieniowanie dipola Hertza, proste układy ładunków, dla których znane są dokładne rozwiązania. Nie można niedocenić ich znaczenia praktycznego, na takich bowiem rozwiązaniach opiera się intuicja inżynierska, która pozwala tworzyć nowe układy i znajdować dla nich zastosowania. Jednak nawet najprostsze wydawałoby się zagadnienia, jak choćby znalezienie rozkładu ładunków na elemencie przewodzącym innym niż sfera wymaga użycia metod przybliżonych. Historycznie do metod takich należały metody wariacyjne [11, 31] oraz metody projekcji. Można przyjąć, że projekcję jako metodę dyskretyzacji i rozwiązania przybliżonego zagadnień fizycznych opisywanych równaniami różniczkowo-całkowymi, zaczęto stosować pod koniec XIX wieku, pod wpływem pionierskich prace Rayleigha, Bubnowa i Galerkina¹. Metody te, pierwotnie nierozzerwalnie związane z rachunkiem wariacyjnym, dały podstawy technice rozwiniętej później jako Metoda Momentów.

Rozwój techniki bardzo wysokich częstotliwości, stymulowany oczywiście zapotrzebowaniem przemysłu wojennego, nie mógłby mieć miejsca bez zastąpienia czy bardziej uzupełnienia opisu polowego opisem obwodowym w latach 40-tych XX wieku [78]. Pozwoliło to na użycie znacznie bardziej zaawansowanego w owym czasie aparatu teorii obwodów, w tym bardzo dobrze rozwiniętych metod syntezy [109]. Tworzenie obwodowych schematów zastępczych dla problemów polowych wymuszało ograniczenie klasy projektowanych struktur, do takich, gdzie osiągalne były rozwiązania analityczne dokładne, jak falowody cylindryczne, bądź rozwiązania przybliżone były łatwo osiągalne, jak np. przegrody indukcyjne bądź pojemnościowe. Pomimo wydawałoby się ograniczonych możliwości projektowych, konstruowano bardzo złożone systemy, do jakich z pewnością należały radiolinie łączące większe miasta w USA [118]. Pomimo coraz bardziej zaawansowanych metod analizy, modelowanie obwodowe wciąż jest istotnym elementem inżynierii mikrofalowej.

Rozwój szybkich i wydajnych komputerów (warto na marginesie zaznaczyć, że już w roku 1984 [98] pisano, że ówczesne możliwości komputerów pozwalają skupić się na zagadnieniach polowych bez konieczności tworzenia modeli zastępczych) zapoczątkowało nową tendencję w projektowaniu układów mikrofalowych - analizę pełnofalowa, czyli bezpośrednio rozwiązanie równań zastępuje tworzenie modeli obwodowych. Takie podejście wymaga

¹Rayleigh, J. W. "In Finding the Correction for the Open End of an Organ-Pipe.", 1870
Ritz, W. "ber eine neue Methode zur Lsung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." 1908, źródło: <http://mathworld.wolfram.com>

użycia znacznej mocy obliczeniowej, pozwala jednak radykalnie poszerzyć klasę projektowanych układów. We współczesnych aplikacjach, coraz częściej wykorzystuje się zjawiska polowe trudne lub niemożliwe do zamodelowania metodami obwodowymi, jak choćby filtry dwumodowe [1]. Coraz częściej także, metody syntezy silnie rozwinięte po II wojnie światowej [80, 109] wspomagane są optymalizacją, co z kolei stymuluje rozwój metod analizy elektromagnetycznej. Od metod pełnofalowych zaczyna się wymagać więc nie tylko dokładności, uniwersalności ale także szybkości umożliwiającej optymalizację projektowanych układów. Obecnie wysiłek badawczy skierowany jest na podniesienie wydajności metod pełnofalowych przy jednoczesnym zachowaniu ich uniwersalności i dokładności.

Poszukiwanie przybliżonych rozwiązań problemów fizycznych opisywanych równaniami różniczkowymi liniowymi z użyciem komputerów można podzielić na dwa etapy: pierwszy polega na przekształceniu zagadnienia definiowanego w przestrzeni ciągłej do równania macierzowego, etap drugi stanowi jego rozwiązanie. W zależności od wybranej metody dyskretyzacji, liczba zmiennych opisująca to samo zagadnienie fizyczne może różnić się nawet o kilka rzędów wielkości. Można zaobserwować ogólną prawidłowość, że przygotowanie małego, w sensie liczby zmiennych, problemu wymaga dużych nakładów obliczeniowych i odwrotnie, problem dużych rozmiarów można zdefiniować stosunkowo prosto. Różnica pomiędzy dwoma podejściami jest taka, że o ile rozwiązanie problemu dyskretnego dokonywane jest z użyciem komputera, o tyle jego zdefiniowanie wymaga często przekształceń analitycznych, wiedzy dotyczącej spodziewanej postaci rozwiązania, ponadto, co jest bodaj najważniejsze, niewielka zmiana analizowanej struktury wymagać może pracochłonnego przeformułowania problemu. W miarę rozwoju możliwości obliczeniowych komputerów, przy jednoczesnym spadku ich ceny można zaobserwować ewolucję używanych w elektrodynamice metod numerycznych. Stopniowo odchodzi się od metod wymagających dużego zaangażowania na etapie konstrukcji problemu dyskretnego w stronę algorytmów, w których koszt numeryczny jego budowy jest mały, bądź zaniedbywalny. Metody takie są bardziej uniwersalne w tym sensie, że łatwo jest analizować struktury o dowolnej geometrii, czy dokonywać ich optymalizacji. Ceną za wygodę i uniwersalność algorytmu jest ogromna liczba zmiennych konieczna do opisu problemu, a co za tym idzie, jego rozwiązanie wymaga użycia znacznych zasobów obliczeniowych. Z drugiej strony podejście takie stymuluje zarówno rozwój komputerów jak i algorytmów używanych do operacji macierzowych. Zaletą takiego podejścia jest to, że rozwój np. szybkich metod rozwiązywania równań liniowych pożądanym jest w większości dziedzin fizyki i techniki, nie tylko elektrodynamice obliczeniowej, w przeciwieństwie do wąskich problemów ściśle mikrofalowych. Innymi słowy, warto pracować nad zagadnieniami mającymi możliwie najszersze zastosowanie [92].

W tym kontekście nie powinien zaskakiwać fakt, że wśród współcześnie stosowanych metod obliczeniowych popularność zdobywa Metoda Różnic Skończonych. Dyskretyzacja zagadnienia ciągłego odbywa się w niej praktycznie zerowym kosztem, możliwa jest analiza dowolnych geometrii, a jej implementacje pozwalają na analizę zagadnień opisanych kilkoma milionami zmiennych nawet typowym na komputerze klasy PC. Oczywiście, otrzymanie dokładnego wyniku wiąże się z dużym czasem obliczeń, jednak rozwinięto wiele modyfikacji metody pozwalających przyspieszyć analizę zachowując jednocześnie podstawową cechę metody, jaką jest łatwość implementacji i uniwersalność. Metody poprawy wydajności Metody Różnic Skończonych podzielić można według różnych kryteriów. Wyróżnić można algorytmy poprawy dokładności (można użyć mniej zmiennych aby otrzymać wymaganą dokładność) [9, 85], oraz zmniejszenia rozmiaru problemu [14, 19, 62, 68]. Można także po-

dzielić je na wymagające przeformułowania problemu ciągłego [19, 68], lub modyfikujące istniejący już operator dyskretny [54, 62]. Można też wyróżnić metody z wykorzystaniem znanych a priori własności rozwiązania [19, 68, 113] lub działające w sposób automatyczny [4, 99]. Przy tak określonych podziałach, koncepcje dyskutowane w niniejszej pracy można zakwalifikować jako związane z redukcją rozmiaru problemu wykorzystując znane a priori własności rozwiązania poprzez modyfikację problemu dyskretnego.

Tezy pracy

W niniejszej pracy dyskutowane są metody wykorzystania rzutowania Rayleigha-Ritza w przestrzeni \mathcal{R}^n do poprawy wydajności Metody Różnic Skończonych. Metoda ta, jako sposób dyskretyzacji problemu ciągłego charakteryzuje się znikomym kosztem budowy macierzy problemu, ponadto macierz ta ma bardzo regularną strukturę. Ułatwia to budowę podprzestrzeni rzutowych w oparciu o fizyczne własności rozwiązania. Sama koncepcja rzutowania w przestrzeni \mathcal{R}^n jest szeroko wykorzystywana między innymi w iteracyjnych metodach rozwiązywania równań i zagadnień własnych [4, 94], czy też algorytmach związanych z redukcją rzędu modelu [14, 52, 99]. We wszystkich jednak przypadkach podprzestrzeń w której rozwiązywany jest wyjściowy problem macierzowy budowana jest w oderwaniu od fizycznych cech rozwiązania, a jedynie w oparciu o własności samej macierzy. W niniejszej pracy zaproponowana jest odmienna koncepcja, polegająca na niezautomatyzowanej budowie podprzestrzeni, w oparciu o fizykę opisywanych zjawisk. Zasadnicza część pracy jest poświęcona tworzeniu takich podprzestrzeni. Przy takich założeniach można sformułować następujące tezy:

- W oparciu o znane a priori własności rozkładów pola można zdefiniować podprzestrzeń, w której rozwiązanie problemu elektromagnetycznego, pierwotnie zdefiniowanego w oparciu o Metodę Różnic Skończonych będzie efektywniejsze, uwzględniając wszystkie parametry wpływające na wydajność, czyli zarówno ilość zmiennych jak i gęstość macierzy problemu czy zbieżność solverów iteracyjnych.
- Liczba zmiennych w analizie Metodą Różnic Skończonych jest nadmiarowa i można ją zredukować metodami projekcji bez utraty dokładności.
- Metody projekcji w przestrzeni euklidesowej pozwalają zdefiniować ogólny mechanizm konstrukcji algorytmów hybrydowych FD-MRTD/PEE.

Zakres pracy

Pracę rozpoczynają dwa rozdziały mające na celu przedstawienie kontekstu matematycznego w jakim należy widzieć proponowane algorytmy. W pierwszym rozdziale przedstawiona jest Metoda Różnic Skończonych. Celem tego rozdziału jest prezentacja rzadko wykorzystywanego w praktyce opisu macierzowego metody, tylko bowiem w takim formalizmie można w spójny sposób zaprezentować rozwiązania będące treścią niniejszej pracy. Rozdział drugi ma na celu przybliżenie metod numerycznych bazujących na projekcji Rayleigha-Ritza. Klasycznym przykładem jest tu oczywiście Metoda Momentów, jednak głównym założeniem rozdziału jest prezentacja metod siatkowych jak i iteracyjnych metod rozwiązywania równań we wspólnym formalizmie przestrzeni Hilberta. Rozdział trzeci,

dotyczący prezentacji oryginalnych rozwiązań, opisuje równoważność między rzutowaniem operatorów różniczkowych w przestrzeni ciągłej i operatora dyskretnego definiowanego w Metodzie Różnic Skończonych. Równoważność ta pozwala uzyskiwać inne metody siatkowe poprzez rzutowanie w \mathcal{R}^n operatora różnicowego. Zapis macierzowy i sformułowanie problemu w przestrzeni skończeniowymiarowej pozwala w łatwy sposób sformalizować lokalne modyfikacje metody, prowadzące w efekcie do definiowania algorytmów hybrydowych, których omówienie kończy rozdział trzeci. Rozdział ostatni zawiera przykłady analiz wybranych struktur mikrofalowych w użyciu opisanych wcześniej metod. Ze względu na charakter prowadzonych prac są to przeważnie struktury definiowane w cylindrycznym układzie współrzędnych.

Na zakończenie wstępu warto jeszcze przedstawić kontekst, w jakim proponowane w pracy rozwiązania były rozwijane. W pierwszej kolejności dyskretna projekcja miała być alternatywnym sposobem rozwinięcia w funkcje własne PEE [68] w falowodzie prostokątnym [47], zapewniającym łatwe łączenie dziedziny PEE i różnic skończonych. Projekcja dyskretna pozwoliła na budowę operatora dla metody hybrydowej w postaci jawnej, co ułatwiało obliczenia w dziedzinie częstotliwości i rozwiązywanie problemów własnych. Jak będzie to dyskutowane w rozdziale 3, wszystkie cechy sformułowania ciągłego bezpośrednio przenoszą się do przestrzeni dyskretniej. Oczywiście bazy zbudowane w oparciu o funkcje harmoniczne, jakkolwiek znacząco poprawiały wydajność nie wyczerpywały wszystkich możliwości. Projekcja w \mathcal{R}^n dopuszcza rozwiązanie problemu właściwie w dowolnej podprzestrzeni, zatem należało rozwiązać problem - które z tych przestrzeni są warte stosowania w elektrodynamice. Pierwsze próby dotyczyły lokalnego rozrzedzania siatki - czyli sformułowania sprowadzalnego do metody hybrydowej FDTD-HAAR MRTD. Wbrew pozorom implementacja takich algorytmów okazała się dość złożona. Rozwiązań należało szukać wśród technik stosowanych w algorytmach MRTD, stąd zainteresowanie nimi widoczne w niniejszej pracy. Drugim kierunkiem prac były próby łączenia metodą projekcji Metody Różnic Skończonych z Metodą Elementów Skończonych, przynajmniej w problemach opisywanych tymi samymi równaniami. Niestety, jak będzie to pokazane pod koniec rozdziału 3, łączenie takie pociąga za sobą znaczne komplikacje, na tym etapie badań zostało więc zarzucone. Z próby łączenia wspomnianych dwóch metod narodziła się koncepcja użycia funkcji wzorowanych na elementach Lagrange'a w miejsce falek. Zostały one z powodzeniem zaimplementowane.

Rozdział 1

Wprowadzenie do Metody Różnic Skończonych

Nie popełniając wielkiego błędu można założyć, że Metoda Różnic Skończonych jest stosowana w mniej lub bardziej sformalizowany sposób od początków istnienia rachunku różniczkowego. Przybliżanie pochodnej ilorazem różnicowym, będące podstawą metody, pozwala na rozwiązanie przybliżone zagadnień trudnych czy niemożliwych do policzenia analitycznie. Metoda Różnic Skończonych jest jednocześnie łatwa do zaimplementowania, uniwersalna oraz wydajna, stąd jej stale rosnąca popularność, przynajmniej w zakresie elektrodynamiki obliczeniowej. Za początek metody w dzisiejszym rozumieniu można przyjąć opublikowaną w 1901 roku pracę Rungego i Kutty dotyczącą całkowania numerycznego. Kolejnym kamieniem milowym w jej rozwoju jest użycie przybliżenia różnicowego do szukania rozwiązań równania Laplace'a (Courant 1928r.) oraz oszacowanie błędu dyskretyzacji przez Gershgorina w 1930 roku. Co ciekawe, autorzy tej pierwszej pracy dyskretyzują problem Laplace'a nie w celu znalezienia rozwiązań, lecz w celu wykazania, że w ogóle one istnieją [105]. Kontynuując tę myśl, można postawić tezę, że dyskretyzacja problemu ciągłego Metodą Różnic Skończonych zachowuje wiele jego własności fizycznych. Ścisła relacja między problemem ciągłym i zdyskretyzowanym w odniesieniu do problemów elektrodynamicznych rozważana jest w pracy [108], która definiuje Metodę Różnic Skończonych w postaci macierzowej, wykorzystanej w niniejszej pracy. Kluczową pracą związaną z zastosowaniem Metody Różnic Skończonych w elektrodynamice obliczeniowej jest artykuł Yee z 1966 roku [121], w którym zdefiniowano siatkę różnicową dla trójwymiarowych i wektorowych problemów z zachowaniem dokładności drugiego rzędu, uzyskanej dzięki odpowiedniemu przesunięciu względem siebie składowych pól. Siatka powstała w ten sposób zwyczajowo nazywa się siatką Yee. W pracy [121] zaproponowano rozwiązanie relaksacyjne problemu w dziedzinie czasu, które nie wymaga rozwiązywania układu równań ani faktoryzacji macierzy. Takie sformułowanie pozwala na definiowanie znacznie większych problemów, w sensie liczby zmiennych, niż inne metody. Popularność różnic skończonych wzrastała wraz ze wzrostem mocy obliczeniowej i ekspansją komputerów. Obecnie znajduje to wyraz w ilości komercyjnie dostępnych symulatorów pełnofalowych, np. QWED, CST, XFDTD [26, 89, 119].

Pracę dotyczącą metod projekcji operatorów różnicowych rozpoczyna krótka prezentacja samej metody. Rozdział ten nie ma na celu systematycznego opisu algorytmów mających bardzo bogatą literaturę [12, 56, 95, 103, 104, 108, 121]. Celem zaprezentowanych poniżej rozważań jest przedstawienie metody w ramach formalizmu macierzowego i zaprezentowa-

nie jej wariantów stanowiących punkt wyjścia do dyskutowanych w dalszej części pracy algorytmów projekcji.

1.1 Założenia Metody Różnic Skończonych

Punktem wyjścia Metody Różnic Skończonych jest przybliżenie pochodnej funkcji ilorazem różnicowym. Skoro pochodną funkcji $\mathbf{f}(t)$ definiuje się jako granicę wyrażenia

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t} \quad (1.1)$$

to intuicyjnie, zakładając niezerową wartość przyrostu Δt w (1.1) otrzymuje się wartość mniej lub bardziej zbliżoną do $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0}$. W wybranym punkcie t_0 pochodna funkcji $\mathbf{f}(t)$ może zatem być aproksymowana przez wyrażenie

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0} \approx \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t} \quad (1.2)$$

Przybliżenie (1.2) wystarczy, aby zdefiniować numeryczną metodę całkowania zagadnień początkowych (Rungego-Kutty). Niech dane będzie zagadnienie początkowe w dziedzinie funkcji ciągłych postaci

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{f}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t), t \right) = 0 \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{f}(t_0) = \alpha_0 \quad (1.3b)$$

Stosując przybliżenie (1.2) i (1.3) można zdefiniować w dyskretnej przestrzeni próbek jako

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{f}(t_0), \mathbf{f}(t_0 + \Delta t), t_0) = 0 \quad (1.4)$$

skąd już tylko krok do zbudowania algorytmu iteracyjnego postaci

$$\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{f}(t_0), t_0) \quad (1.5)$$

Odpowiedzi na pytanie, jakie relacje łączą \mathbf{F} (1.3) z $\tilde{\mathbf{F}}$ (1.4) i $\hat{\mathbf{F}}$ (1.5) dostarcza sformułowana w 1901 roku metoda Rungego-Kutty. Pozwala ona iteracyjnie rozwiązywać zagadnienia początkowe, znajdując wartości szukanej funkcji w kolejnych chwilach $k\Delta t$ na podstawie wartości w $(k-1)\Delta t$ lub wcześniejszych, w przypadku zagadnień początkowych wyższych rzędów. Metoda ta, pomimo, a może dzięki swojej prostocie pozwala rozwiązywać skomplikowane problemy, w tym również nieliniowe.

1.1.1 Dokładność schematów różnicowych

Schemat (1.2), który jest najprostszym możliwym przybliżeniem pochodnej, pozwala na jej wyznaczenie z dokładnością rzędu $\mathcal{O}(\Delta t)$ [12, 95]. Większą dokładność można osiągnąć zastępując (1.2) następującym wyrażeniem,

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0} \approx \frac{\mathbf{f}(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) - \mathbf{f}(t_0 - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (1.6)$$

Jak widać, w (1.6) pochodna obliczana jest z użyciem próbek funkcji $\mathbf{f}(t)$ z obu stron t_0 . Stąd wywodzi się nazwa takiego przybliżenia, różnice centralne *central differences*, w odróżnieniu od różnic przednich *forward differences* (1.2), bądź wstecznych *backward differences*,

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0} \approx \frac{\mathbf{f}(t_0) - \mathbf{f}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.7)$$

Zastosowanie wzoru (1.6) pozwala osiągnąć dokładność rzędu $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ przy takiej samej złożoności obliczeniowej, zatem jest stosowany wszędzie tam, gdzie tylko jest to możliwe. Warto zwrócić uwagę na fakt, że (1.6) daje przybliżoną wartość pochodnej w innym punkcie niż próbkowane są argumenty, co jest bardzo istotne przy dyskretyzacji dziedziny obliczeniowej. Schematy różnicowe można także zdefiniować dla pochodnych wyższych rzędów. Przykładowa zależność dla drugiej pochodnej to

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{f}(t) \right|_{t=t_0} \approx \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - 2\mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (1.8)$$

Przybliżenie (1.8) także daje dokładność $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Zależność (1.8) może zostać potraktowane jako złożenie dwóch pochodnych pierwszego rzędu przednich i wstecznych, co jest istotne w implementacji różnic skończonych do układu równań pierwszego rzędu, w szczególności równań Maxwella.

Zależności (1.6), (1.2), (1.7) czy (1.8), choć najczęściej stosowane, nie wyczerpują wszystkich możliwych aproksymacji pochodnej. W literaturze [12, 95, 100] są opisane metody adaptacji schematów wyższych rzędów, tj. o większej dokładności, ale angażujące większą liczbę próbek [12, 95]. Wzrost dokładności, jaki osiąga się w przypadku, odbywa się jednak kosztem wzrostu nakładów obliczeniowych. Z tego względu, zastosowanie ich nie zawsze poprawia wydajność, pojawia się także problem z implementacją warunków brzegowych, podobny do występujących w algorytmach *multiresolution* [82]. Wszystko to sprawia, że nie przyjęły się one w elektrodynamice obliczeniowej [124].

Przykład 1.1 Zanim omówiona zostanie Metoda Różnic Skończonych w zagadnieniach elektrodynamicznych, przedyskutowany zostanie prosty przykład użycia schematu różnicowego do rozwiązania zagadnienia początkowego. Przykładem niech będzie równanie wahadła matematycznego, które jest jednym z kanonicznych problemów fizyki. Problem ten przeważnie upraszcza się zakładając małe wychylenia. Pominięcie tego uproszczenia prowadzi do równania nieliniowego,

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) \quad (1.9)$$

gdzie $\varphi(t)$ jest wychyleniem zależnym od czasu, l długością wahadła a g przyspieszeniem ziemskim. Rozważone zostanie wahadło sekundowe, czyli o długości niecałe 25cm^1 , tak aby jego okres dla małych wychyleń wynosił 1 sekundę. Schemat różnicowy (1.8) dla równania (1.9) wygląda następująco

$$\frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - 2\varphi(t_0) + \varphi(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t_0)) \quad (1.10)$$

¹24.85cm

co można przekształcić do problemu iteracyjnego postaci (1.5),

$$\varphi(t_0 + \Delta t) = 2\varphi(t_0) - \varphi(t_0 - \Delta t) - \Delta t^2 \frac{g}{l} \sin(\varphi(t_0)) \quad (1.11)$$

Aby schemat (1.11) był stabilny, należy prawidłowo dobrać krok czasowy Δt , poniżej pewnej granicznej wartości. Jego mała wartość pozwala uzyskać dokładniejszy wynik, kosztem jednak wydłużenia czasu obliczeń. Aby ją znaleźć wartość graniczną, można wykorzystać np. teorię filtrów cyfrowych [79]. Z takiego punktu widzenia zależność (1.11) definiuje filtr cyfrowy o transmitancji w dziedzinie transformaty \mathcal{Z}

$$\mathcal{H}(Z) = Z^{-2} - (A - 2)Z^{-1} + 1 \quad (1.12)$$

Za [79], należy dobrać dodatnią stałą $A = \Delta t^2 \frac{g}{l}$, aby $A \leq 4$, co jest równoważne ze zdefiniowaniem filtra na granicy stabilności, czyli ze wszystkimi biegunami na okręgu jednostkowym. Rozważania na temat stabilności w problemach elektrodynamicznych znaleźć można także w pozycji [103], w ogólniejszym sformułowaniu w [72], natomiast dyskusję dotyczącą schematów wyższych rzędów można znaleźć w pracach [17, 18]. W tabeli 1.1 zamieszczono wyniki symulacji (1.11), dla różnych wychyleń początkowych oraz różnych kroków czasowych. Warunek początkowy w postaci zerowej prędkości i zadanego wychylenia α_0 wymuszono poprzez zadanie $\varphi(-\Delta t) = \varphi(0) = \alpha_0$. Okres drgań znaleziono graficznie określając punkty przejścia $\varphi(t)$ przez 0.

TABELA 1.1: Numerycznie znaleziony okres drgań wahadła matematycznego (sekundowego) dla dużych wychyleń uzależniony od wychylenia początkowego α_0 i kroku czasowego Δt . Widoczne jest pogorszenie dokładności dla dużych kroków czasowych. Jednocześnie, dla bardzo gęstego próbkowania błędy zaokrągleń powodują rozbieżności w porównaniu z rozwiązaniem analitycznym.

		Wychylenie maksymalne α_0 [°]					
		1	10	20	45	90	160
$\frac{\Delta t}{\Delta t_{max}}$	0.005	0.99949	0.99949	1.0027	1.0186	1.0186	0.95493
	0.01	1.0027	0.99949	1.0027	1.0186	0.95493	0.95493
	0.05	1.0090	1.0059	1.0027	1.0186	1.0186	0.95493
	0.1	1.0409	1.0441	1.0345	1.0504	1.0186	0.95493
	0.2	1.1809	1.1777	1.1777	1.1777	1.1459	1.1141
	0.5	1.3719	1.3751	1.3687	1.3687	1.4006	1.4324
	1	2.0085	2.0054	2.0054	2.0054	2.0372	2.0690

1.1.2 Dyskretyzacja zagadnień brzegowych

Aproksymację różnicową można z powodzeniem zastosować do rozwiązywania zagadnień brzegowych. Wymaga ono jednak nieco innego podejścia. Zasadnicza różnica między zagadnieniem początkowym a brzegowym polega na jednoczesnym wymuszeniu wartości funkcji (lub pochodnej) na całym brzegu dziedziny obliczeniowej, co uniemożliwia zdefiniowanie schematu otwartego postaci (1.5). Zdyskretyzowane zagadnienie brzegowe, w przypadku problemu jednowymiarowego, można zapisać jako

$$\mathbf{f}(x) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{f}(x + \Delta x), x, \mathbf{f}(x - \Delta x)) \quad (1.13)$$

rzędu dla zdyskretyzowanego problemu (1.16). Przykładowa siatka dla $N = 10$ oczek jest przedstawiona na rysunku 1.1. Jak widać, zdefiniowano $N + 1$ węzłów siatki głównej, które można ponumerować od 0 do N oraz N siatki dualnej $n = 0..N - 1$. Zakładając krok czasowy symulacji równy Δt , dyskretyzacja problemu (1.16) w dziedzinie czasu jak i przestrzeni prowadzi do otwartego schematu postaci

$$H_y^{k+\frac{1}{2}}((n + \frac{1}{2})\Delta z) = H_y^{k-\frac{1}{2}}((n + \frac{1}{2})\Delta z) + \frac{\varepsilon(n + \frac{1}{2})\Delta t}{\Delta z} (E_x^k((n + 1)\Delta z) - E_x^k(n\Delta z)) \quad (1.17a)$$

$$E_x^{k+1}(n\Delta z) = E_x^k(n\Delta z) + \frac{\mu(n\Delta z)\Delta t}{\Delta z} (H_y^{k+\frac{1}{2}}((n + \frac{1}{2})\Delta z) - H_y^{k+\frac{1}{2}}((n - \frac{1}{2})\Delta z)) \quad (1.17b)$$

Górny indeks k określa chwilę czasu w której określona jest próbka pola. Zapis (1.17) podkreśla fakt, że próbki czasowe pól elektrycznego E i magnetycznego H są określone w momentach czasu różniących się o $\Delta t/2$. Podobne przesunięcie występuje dla próbek przestrzennych, co jest związane z użyciem przybliżenia (1.6). Dla uproszczenia zapisu, w dalszej części pracy przyjmuje się następujący zapis

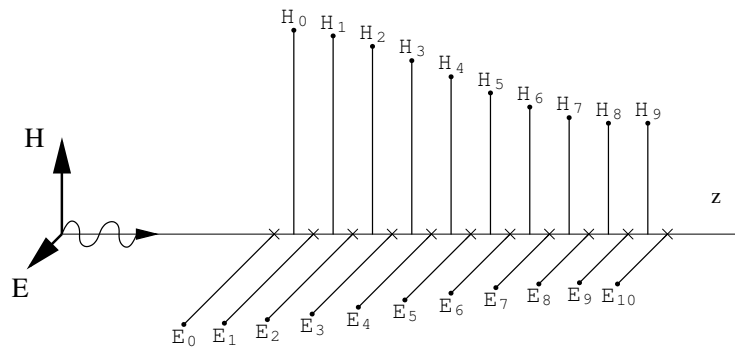
$$E_x(n) \equiv E_x(n\Delta z) \quad (1.18a)$$

$$H_y(n) \equiv H_y(n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z) \quad (1.18b)$$

dla przypadku jednowymiarowego. Dla sformułowania wielowymiarowego zastosowany zostanie podobny formalizm (1.29). Zapis (1.18) przyporządkowuje próbkę pola do ustalonej komórki, nie zaś ściśle do położenia węzła. Bardzo ważnym parametrem symulacji czasowej, jak wspomniano już w przykładzie (1.1), jest krok czasowy zapewniający stabilność. W przypadku (1.17) musi on spełniać warunek Couranta [103, 121]

$$\Delta t \leq \Delta z \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\Delta z}{c} \quad (1.19)$$

gdzie jako c oznaczono prędkość światła w ośrodku. Szersza dyskusja dotycząca kroku czasowego zapewniającego stabilność będzie zamieszczona w dalszych rozdziałach. Warto zauważyć, że czas określony w oparciu o (1.19) jest równy czasowi przejścia fali o jeden węzeł siatki.



RYSUNEK 1.1: Umieszczenie próbek pól elektrycznego i magnetycznego dla omawianego problemu jednowymiarowego.

Definicja pobudzenia

Problemy elektrodynamiczne sformułowane w dziedzinie czasu, w odróżnieniu od przykładu (1.1), przeważnie nie dotyczą relaksacji układu przy zadanych warunkach początkowych. Z reguły poszukiwana jest odpowiedź układu na zadane pobudzenie przy zerowych warunkach początkowych. Pobudzenie, analogicznie jak w fizycznym układzie polega na przyłożeniu pewnego napięcia lub prądu w wybranym punkcie lub obszarze, co jest równoważne z wymuszeniem wartości wybranej próbki, lub grupy próbek E_x lub H_y . Pobudzenie może być tzw. twarde, czyli nie uwzględniać dotychczasowego stanu układu lub addytywne. Pobudzenie twarde oznacza, że dla pewnej funkcji wymuszenia $\mathbf{f}(t)$ ustala się wartość próbki np. $E_x^k(x)$ równą wartości funkcji wymuszenia w odpowiedniej chwili,

$$E_x^k(n) = \mathbf{f}(k\Delta t) \quad (1.20)$$

Znacznie częściej definiuje się pobudzenie addytywne, czyli

$$E_x^k(n) = E_x^k(n) + \mathbf{f}(k\Delta t) \quad (1.21)$$

W przypadku jednoczesnego pobudzenia większej liczby punktów wzory (1.20) i (1.21) mają analogiczną postać. Zwykle istnieje dodatkowa relacja między wartościami pobudzenia dla różnych punktów tak, by np. odwzorować rozkład pola rodzaju którym pobudzana jest struktura.

Warunki brzegowe

Wykonując analizę w oparciu o schemat iteracyjny (1.17) konieczne jest dodatkowo określenie wartości skrajnych próbek pól. Nawiązując do ilustracji 1.1, widać, że nie jest możliwe obliczenie $E(0)$ i $E(10)$ w sposób (1.6). Definiowanie warunków brzegowych w Metodzie Różnic Skończonych jest bardzo szerokim zagadnieniem [10, 40, 90, 102, 112]. W rozważanym najprostszym przypadku jednowymiarowym, warto wspomnieć o dwóch możliwościach (przykładowo dla $E(10)$) :

- Założenie ścianki elektrycznej, czyli $E_x(10) = 0$ w każdym momencie symulacji
- Nieograniczona propagacja w kierunku z . Znając prędkość fali c , można warunek ten zapisać jako

$$E_x^k(10) = \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta z}\right) E_x^{k-1}(10) + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta z}\right) E_x^{k-1}(9) \quad (1.22)$$

1.3 Macierzowy zapis algorytmu FDTD

Metody projekcji dyskutowane w pracy traktują operację dyskretnego różniczkowania jako odwzorowanie w przestrzeni \mathcal{R}^n . W tym celu wygodne jest przedstawienie algorytmu (1.31) w postaci macierzowej, która choć rzadziej stosowana, jest całkowicie równoważna sformułowaniom otwartym (1.17) [103].

Zgodnie z postulatem z podrozdziału 1.2 górne indeksy definiujące położenie czasowe próbek są zawsze całkowite, domyślnie jednak próbki \mathbf{e} i \mathbf{h} są przesunięte o $\frac{1}{2}\Delta t$. Warto jeszcze zauważyć, że zgodnie z rysunkiem 1.1 wektor próbek pola magnetycznego (1.25) powinien być o 1 krótszy od (1.24). Macierz \mathbf{D} (1.23) zdefiniowano natomiast jako kwadratową. Przy zapisie (1.26) oznacza to zdefiniowanie nadmiarowej próbki $H_y(N)$, znajdującej się poza dziedziną obliczeniową. Autor konsekwentnie stosuje taki zapis, ułatwia on bowiem konstrukcję problemów wielowymiarowych. Nadmiarowe elementy są usuwane razem z elementami zerowanymi przy implementacji ścianek elektrycznych bądź magnetycznych co jest znacznie prostsze implementacyjne niż budowanie od razu problemu jak zaproponowano w pracach [95, 103].

1.4 Trójwymiarowe sformułowanie na siatce Yee

Najczęściej stosowaną wersją Metody Różnic Skończonych jest sformułowanie czasowe zdyskretyzowane w sposób opisany w 1966 roku przez K. S. Yee (rys. 1.2) [121]. Powstała w ten sposób siatka zwyczajowo nazywana jest siatką Yee. Składowe pól są w niej tak rozmieszczone, że operacja rotacji, zachowuje po zdyskretyzowaniu dokładność drugiego rzędu. Dyskretyzowany operator rotacji we współrzędnych prostokątnych, definiowany w przestrzeni funkcyjnej ma postać,

$$\nabla \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, zostanie wprowadzona konwencja definiowania położenia próbki pola w siatce różnicowej poprzez podanie jego indeksów (1.18). Rozmieszczenie poszczególnych składowych w obrębie komórki widoczne jest na rys. 1.2. Dla regularnej siatki można ustalić konwencję zapisu analogiczną do (1.18):

$$E_x(m, n, l) \equiv E_x \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta x, n\Delta y, l\Delta z \right) \quad (1.29a)$$

$$E_y(m, n, l) \equiv E_y \left(m\Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta y, l\Delta z \right) \quad (1.29b)$$

$$E_z(m, n, l) \equiv E_z \left(m\Delta x, n\Delta y, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta z \right) \quad (1.29c)$$

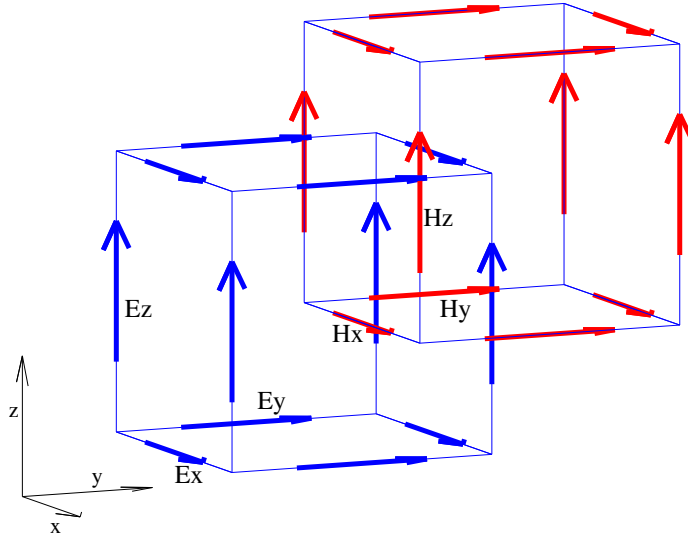
oraz dla pola magnetycznego:

$$H_x(m, n, l) \equiv H_x \left(m\Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta z \right) \quad (1.30a)$$

$$H_y(m, n, l) \equiv H_y \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta x, n\Delta y, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta z \right) \quad (1.30b)$$

$$H_z(m, n, l) \equiv H_z \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta y, l\Delta z \right) \quad (1.30c)$$

Łącząc dyskretyzację przestrzenną z czasową (1.17) otrzymujemy schemat różnicowy, stanowiący podstawę większości współczesnych algorytmów bazujących na metodzie różnic



RYSUNEK 1.2: Ułożenie próbek pól w siatce różnicowej Yee. Zaznaczono składowe o tym samym indeksie l, m, n (1.29),(1.30).

skończonych.

$$H_x^{k+1}(m, n, l) = H_x^k(m, n, l) + \Delta t \mu_x(m, n, l) \left(-\frac{E_y^k(m, n, l) - E_y^k(m, n, l-1)}{\Delta z} + \frac{E_z^k(n, m, l) - E_z^k(n, m-1, l)}{\Delta y} \right) \quad (1.31a)$$

$$H_y^{k+1}(m, n, l) = H_y^k(m, n, l) + \Delta t \mu_y(m, n, l) \left(\frac{E_x^k(m, n, l) - E_x^k(m, n, l-1)}{\Delta z} - \frac{E_z^k(m, n, l) - E_z^k(m-1, n, l)}{\Delta x} \right) \quad (1.31b)$$

$$H_z^{k+1}(m, n, l) = H_z^k(m, n, l) + \Delta t \mu_z(m, n, l) \left(-\frac{E_x^k(m, n, l) - E_x^k(m, n-1, l)}{\Delta y} + \frac{E_y^k(m, n, l) - E_y^k(m-1, n, l)}{\Delta x} \right) \quad (1.31c)$$

$$E_x^{k+1}(m, n, l) = E_x^k(m, n, l) + \Delta t \varepsilon_x(m, n, l) \left(\frac{H_y^{k+1}(m, n, l) - H_y^{k+1}(m, n, l+1)}{\Delta z} - \frac{H_z^{k+1}(n, m, l) - H_z^{k+1}(n, m+1, l)}{\Delta y} \right) \quad (1.31d)$$

$$E_y^{k+1}(m, n, l) = E_y^k(m, n, l) + \Delta t \varepsilon_y(m, n, l) \left(-\frac{H_x^{k+1}(m, n, l) - H_x^{k+1}(m, n, l+1)}{\Delta z} + \frac{H_z^{k+1}(m, n, l) - H_z^{k+1}(m+1, n, l)}{\Delta x} \right) \quad (1.31e)$$

$$E_z^{k+1}(m, n, l) = E_z^k(m, n, l) + \Delta t \varepsilon_z(m, n, l) \left(\frac{H_x^{k+1}(m, n, l) - H_x^{k+1}(m, n+1, l)}{\Delta y} - \frac{H_y^{k+1}(m, n, l) - H_y^{k+1}(m+1, n, l)}{\Delta x} \right) \quad (1.31f)$$

1.5 Macierzowy zapis różnic skończonych

Algorytm FDTD najczęściej definiowany jest w postaci jawnej (1.31). W taki też sposób metoda jest implementowana w większości aplikacji komercyjnych. Dla potrzeb przedstawionych przez autora rozważań, konieczne jest jednak spojrzenie na algorytm FDTD w kontekście formalizmu algebry liniowej, co z kolei w naturalny sposób prowadzi do wykorzystania zapisu macierzowego. Takie sformułowanie zaproponowano w [108]. Przedstawione w niniejszym rozdziale definicje, z niewielkimi modyfikacjami, są wzorowane na wspomnianej pozycji.

Zdefiniowanie problemu trójwymiarowego w postaci macierzowej, analogicznej do (1.27), trzeba rozpocząć od określenia wektorów \mathbf{e} i \mathbf{h} , zawierających próbki odpowiednich pól w siatce Yee. Uogólnienie operatora pierwszej pochodnej \mathbf{D} (1.23) na problemy wielowymiarowe jest stosunkowo proste, jednak jego jawne zdefiniowanie wymaga uwzględnienia dodatkowych zagadnień, nie istniejących w przypadku problemu jednowymiarowego. W szczególności, w przypadku jednowymiarowym, wzajemne przyporządkowanie próbek pól i elementów wektora \mathbf{e} jest oczywiste i intuicyjne. W przypadku wielowymiarowym, sąsiadujące w przestrzeni próbki mogą leżeć na odległych pozycjach w wektorze \mathbf{e} . O ile przy definiowaniu sformułowania jawnego FDTD (1.31) nie było to istotne, bowiem praktycznie każdy język programowania w jakim implementowany jest wspomniany algorytm pozwala definiować tablice wielowymiarowe, zatem problem kojarzenia elementów w siatce z ich pozycją w pamięci całkowicie przeniesiony jest na kompilator lub/i interpreter. Należy bowiem pamiętać, że pamięć komputera ma zawsze liniową strukturę, nawet jeśli nie jest to widoczne dla użytkownika. W sformułowaniu macierzowym trzeba wspomnianą relację zdefiniować w sposób jawny. Dla siatki Yee, o wymiarach X na Y na Z oczek w każdym kierunku, można przyjąć następującą relację między położeniem m, n, l (1.29), (1.30) a elementem wektora próbek, e_i . Zakładając, że element e_i odpowiada próbce $E_x(m, n, l)$ indeksy sąsiadujących pól i pozostałych składowych znajduje się jako

$$E_x(m + 1, n, l) \Leftrightarrow e_{i+1} \quad (1.32a)$$

$$E_x(m, n + 1, l) \Leftrightarrow e_{i+X} \quad (1.32b)$$

$$E_x(m, n, l + 1) \Leftrightarrow e_{i+XY} \quad (1.32c)$$

$$E_y(m + 1, n, l) \Leftrightarrow e_{i+1+XYZ} \quad (1.32d)$$

$$E_y(m, n + 1, l) \Leftrightarrow e_{i+X+XYZ} \quad (1.32e)$$

$$E_y(m, n, l + 1) \Leftrightarrow e_{i+XY+XYZ} \quad (1.32f)$$

$$E_z(m + 1, n, l) \Leftrightarrow e_{i+1+2XYZ} \quad (1.32g)$$

$$E_z(m, n + 1, l) \Leftrightarrow e_{i+X+2XYZ} \quad (1.32h)$$

$$E_z(m, n, l + 1) \Leftrightarrow e_{i+XY+2XYZ} \quad (1.32i)$$

W podobny sposób można zdefiniować wektor próbek pola magnetycznego. Z zapisu (1.32) bezpośrednio wynika sposób definiowania macierzy odpowiadających pierwszej pochodnej, analogicznych do \mathbf{D} (1.23). Dwudiagonalny operator \mathbf{D} (1.23) należy tak przedefiniować, aby odległość między diagonalami wynosiła odpowiednio 1, X oraz $X \cdot Y$ dla różniczkowania odpowiednio po x , y i z . Macierze takie oznaczone będą jako ${}^x\mathbf{D}$, ${}^y\mathbf{D}$ i ${}^z\mathbf{D}$. Każda z nich ma rozmiar $XYZ \times XYZ$. Przy takich oznaczeniach operator reprezentujący rotację można

zapisać jako [108]:

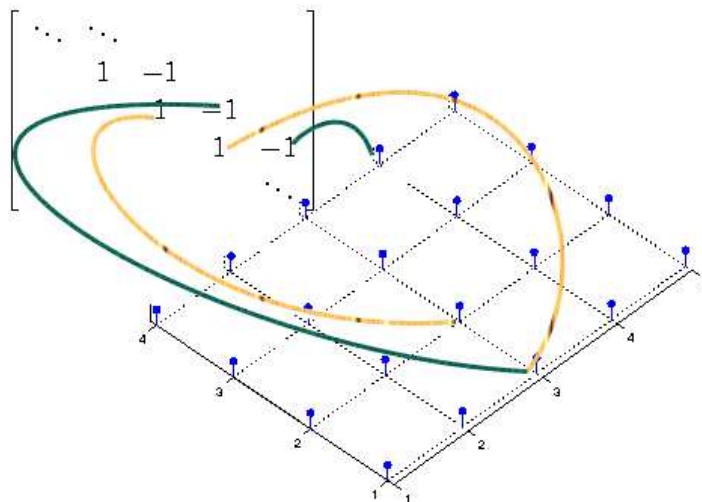
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -z\mathbf{D} & y\mathbf{D} \\ z\mathbf{D} & 0 & -x\mathbf{D} \\ -y\mathbf{D} & x\mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Jak pokazano w [108], podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, rotację na siatce dualnej można wyrazić za pomocą operatora \mathbf{R}^T . Zdyskretyzowane parametry materiałowe można zapisać w postaci macierzy (diagonalnych) $\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz $\boldsymbol{\mu}$ W taki sposób, zależność (1.27) przyjmuje zwartą postać

$$\mathbf{h}^{k+1} = \mathbf{h}^k - \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \Delta t \mathbf{R} \mathbf{e}^k \quad (1.34a)$$

$$\mathbf{e}^{k+1} = \mathbf{e}^k + \boldsymbol{\mu}^{-1} \Delta t \mathbf{R}^T \mathbf{h}^{k+1} \quad (1.34b)$$

W publikacji [108] sporo miejsca przy omawianiu macierzowej postaci (1.33) poświęcono dyskusji zachowania się operatora (1.33) na granicach dziedziny. Definicja macierzy rotacji w postaci (1.33), nie uwzględnia istnienia próbek brzegowych. Przykładowo, podoperator $x\mathbf{D}$ nie traktuje szczególnie próbek brzegowych odpowiadających $l = X$. Pochodna w tym punkcie jest obliczana na podstawie próbek e_n i e_{n+1} (por. rys. 1.3). Zgodnie z (1.32) pierwsza z próbek odpowiada pewnemu punktowi $E_{X,n,l}$ natomiast druga $E_{1,n+1,l}$, czyli w żaden sposób nie jest z nią związana przestrzennie. Rozwiązaniem problemu, znacznie prostszym niż zaproponowano w [108] jest wyzerowanie odpowiednich wierszy i kolumn macierzy, odpowiadających za skrajne próbki. Można to osiągnąć odpowiednio modyfikując macierze materiałowe $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\mu}$.



RYSUNEK 1.3: Obliczanie pochodnej na granicy dziedziny przy konstrukcji macierzy (1.23). Rozwiązaniem problemu przy jednoczesnym zachowaniu prostoty sformułowania jest właściwe zdefiniowanie zerowych warunków brzegowych

1.5.1 Symetryzacja problemu FDTD/FDFD

Sformułowanie (1.34) jest bezpośrednim odpowiednikiem (1.31) zdefiniowanym w przestrzeni macierzy. Dla siatki Yee macierz rotacji zdefiniowana dla wektora próbek pola elektrycznego \mathbf{R} jest transpozycją rotacji pola magnetycznego \mathbf{R}^T . Problem drugiego rzędu

wyprowadzony z równań siatkowych jest symetryczny co czyni schemat z definicji warunkowo stabilnym. Symetryczna macierz problemu drugiego rzędu poprawia także wydajność obliczeniową. Macierz problemu drugiego rzędu wyprowadzona z (1.34) ma wtedy postać

$$\mathbf{A} = \Delta t^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{R} \quad (1.35)$$

Jak widać (1.35) traci symetrię w przypadku zdefiniowania niejednorodnego ośrodka. Poniżej przedstawiona jest procedura pozwalająca zachować zapis (1.34) i symetrię (1.35) również dla ośrodków niejednorodnych. Jako punkt wyjścia zakłada się sformułowanie macierzowe (1.34). Aby uogólnić rozważania, ośrodek zostanie opisany nie tylko przy pomocy przenikalności elektrycznej i magnetycznej, lecz także poprzez macierze przewodności elektrycznej $\boldsymbol{\sigma}$ i magnetycznej $\boldsymbol{\sigma}^m$. Schemat (1.34) przyjmuje wtedy postać:

$$\mathbf{h}^{k+1} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^m \right) = \mathbf{h}^k \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^m \right) - \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{e}^k \quad (1.36a)$$

$$\mathbf{e}^{k+1} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) = \mathbf{e}^k \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{h}^{k+1} \quad (1.36b)$$

Macierze zdefiniowane po lewej stronie równań (1.36) są diagonalne, łatwo więc można uzyskać w pełni użyteczny schemat różnicowy. Aby zredefiniować (1.36), wprowadzone zostaną nowe zmienne:

$$\bar{\mathbf{h}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\Delta t} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^m}{2} \right)} \mathbf{h} \quad (1.37a)$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)} \mathbf{e} \quad (1.37b)$$

równanie (1.34) można przepisać do postaci

$$\bar{\mathbf{h}}^{k+1} = \bar{\mathbf{h}}^k \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^m}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\Delta t} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^m}{2} \right)^{-1} - \mathbf{C} \bar{\mathbf{e}}^k \quad (1.38a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}^{k+1} = \bar{\mathbf{e}}^k \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^{-1} + \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{h}}^{k+1} \quad (1.38b)$$

podstawiając za \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\Delta t} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^m}{2} \right)^{-1}} \mathbf{R} \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^{-1}} \quad (1.39)$$

W macierzy \mathbf{C} zawarto wszystkie parametry materiałowe. Problem jest zdefiniowany dla wektorów zawierających znormalizowane próbki pól, co ma dodatkową zaletę, gdyż w (1.34) amplitudy pól elektrycznych i magnetycznych różnią się o kilka rzędów wielkości, co może w pewnych przypadkach obniżać dokładność obliczeń. W przypadku omawianej normalizacji (1.37) próbki obu pól mają zbliżoną wartość, co jest bardzo pożądane z punktu widzenia metod numerycznych.

Ze względu na fakt, że we wszystkich sformułowaniach różnicowych diskutowanych w dalszej części pracy używana jest jedynie postać zsymetryzowana w sposób omówiony powyżej, jako \mathbf{e} rozumiany jest wektor $\bar{\mathbf{e}}$, podobnie symbolem \mathbf{h} oznacza się $\bar{\mathbf{h}}$ (1.37).

1.6 Metody pokrewne

Na poprzednich stronach przedstawiono sformułowanie macierzowe metody różnic skończonych w dziedzinie czasu, jako proste przeniesienie klasycznego algorytmu otwartego (1.31) powszechnie stosowanego w elektrodynamice obliczeniowej w formalizm macierzowy. Poniżej przedstawione zostaną wybrane sformułowania bazujące na dyskretyzacji pól w siatce Yee, stanowiące punkt wyjścia w analizach przytoczonych w rozdziale czwartym niniejszej pracy.

1.6.1 Równanie falowe w dziedzinie częstotliwości

Najpopularniejszym sformulowaniem Metody Różnic Skończonych stosowanym w elektrodynamice obliczeniowej jest sformułowanie w dziedzinie czasu i dlatego zostało ono omówione na początku przeglądu metod różnicowych. Istnieje jednak cała gama problemów, gdzie celowe jest założenie harmonicznego zmienności pól w czasie. Przykładem może być analiza rezonatorów bądź struktur o bardzo dużej dobroci, których dokładna analiza czasowa wymagałaby wykonania ogromnej liczby iteracji algorytmu (1.31) [115]. Zbudowanie problemu w dziedzinie częstotliwości pozwala także na znalezienie rozkładów pola odpowiadających konkretnemu rodzajowi, co jest bardzo pożądane przy projektowaniu układów. Punktem wyjścia do zapisu różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości (FDFD) będzie zszytowany schemat (1.31), z wymuszoną harmoniczną zmiennością czasową. Niech wektory \mathbf{e} i \mathbf{h} reprezentują unormowane (1.37) próbki amplitud zespolonych pól w węzłach siatki Yee. Zachowując dyskretyzację w przestrzeni, równania (1.31) można przepisać w postaci

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -j\omega\mathbf{h} \quad (1.40a)$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{h} = j\omega\mathbf{e} + \mathbf{j} \quad (1.40b)$$

Z reguły układ (1.40) sprowadza się do równania falowego rugując jedno z pól. Przykładowo, równanie falowe, zapisane dla wektora $\tilde{\mathbf{e}}$ będzie miało postać

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} - \omega^2\mathbf{e} = -j\omega\mathbf{j} \quad (1.41)$$

W przypadku ośrodków stratnych współczynniki w macierzy problemu mogą być zespolone. Niewielka modyfikacja równania (1.41), polegająca na założeniu zerowego wymuszenia, prowadzi do zdefiniowania problemu własnego ze względu na częstotliwość rezonansową:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} = \omega^2\mathbf{e} \quad (1.42)$$

W odróżnieniu od metody czasowej (1.31) zagadnienie (1.42) pozwala znaleźć wszystkie rezonanse wraz z ich rozkładami pól. Sformułowanie czasowe zastosowane do tego celu wymaga umiejętnego doboru pobudzenia - zarówno położenia jak i wyboru składowej.

Jak widać, w obu sformulowaniach, (1.40) i (1.41), pojawia się macierz $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Dzięki normalizacji (1.37) jest ona symetryczna, co ma ogromny wpływ na efektywność obliczeń. W przypadku metod iteracyjnych bazujących na metodach przestrzeni Kryłowa [4, 94], a takie są stosowane przy rozwiązywaniu problemów wielkoskalowych problemów o rzędach rzędu kilkuset tysięcy zmiennych, gdzie takie metody mają zastosowanie, symetryzacja problemu w ogóle umożliwia analizę [115].

Rozwiązanie zagadnienia postaci (1.42) jest wymagające obliczeniowo, i to nie tylko ze względu na potencjalny rozmiar problemu. Otóż macierz problemu jest osobliwa, i około 1/3 jej wartości własnych ma wartość równą zeru [9, 108]. Ich istnienie wynika z faktu, że operator drugiego rzędu, zbudowany na bazie (1.39) nie uwzględnia faktu zerowej dywergencji pola w obszarach pozbawionych źródeł. Innymi słowy, na sformułowanie (1.42) czy (1.41), a także (1.34) powinno się dodatkowo nałożyć więzy, ograniczające wymiar przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Propozycje rozwiązania tego problemu można znaleźć w [42, 122], dla metody czasowej, czy też [106, 107] dla sformułowań macierzowych. Niestety, ograniczenie liczby zmiennych nie wpływa pozytywnie na wydajność obliczeniową metody czasowej. Zawężenie przestrzeni rozwiązań powoduje zwiększenie ilości operacji arytmetycznych na każdą komórkę siatki Yee, co globalnie powoduje spadek wydajności o około 10%. Dlatego, w [42] skupiono się na korzyściach wynikających z ograniczenia wymagań pamięciowych algorytmu niż poprawie jego wydajności. Ponadto, jak pokazano w [16], rozwiązania pasożytnicze nie propagują się w siatce Yee, zatem nie generują pasożytniczych rozwiązań w metodzie czasowej. Zgoła inna sytuacja występuje w przypadku rozwiązywania układów równań czy problemów własnych. Kluczowymi parametrami są tam zarówno wielkość jak i widmo macierzy. Wykluczenie zerowych wartości własnych zdecydowanie poprawia zbieżność, kosztem jednak utraty symetrii. Rozwiązanie kompromisowe zaproponowano w [9], gdzie przez umiejętne wykorzystanie dyskretnego operatora dywergencji przesunięto widmo macierzy tak, że część widma skojarzona z rozwiązaniami pasożytniczymi pokrywa się z częścią związaną z rozwiązaniami fizycznymi. Może komplikować to separację modów pasożytniczych, jednak zdecydowanie przyspiesza rozwiązanie problemów własnych.

1.6.2 Niekartezjańskie układy współrzędnych

Przy definicji schematu różnicowego z wykorzystaniem siatki Yee, zarówno w wersji schematu otwartego (1.31) jak i macierzowej (1.34), zakładano zdefiniowanie problemu w kartezjańskim układzie współrzędnych. W obecnym paragrafie zostanie przedstawiony sposób budowy problemu różnicowego dla siatki cylindrycznej. Szkic cylindrycznej siatki Yee zamieszczono na ilustracji (1.4). Jawny schemat analogiczny do (1.31) można znaleźć np. w [103]. Poniżej zostanie przedstawiona jego reprezentacja macierzowego, traktowana jako szczególna modyfikacja (1.34).

Składowa \mathbf{i}_z rotacji pola E , oznaczona jako F_z może być zapisana jako

$$F_z = \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho \quad (1.43)$$

Powyższe wyrażenie można przepisać w postaci

$$\sqrt{\rho} F_z = \sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{\rho} E_\rho \quad (1.44)$$

Taka z pozoru dziwna normalizacja służy ujednoczeniu współczynników metryki i parametrów materiałowych (1.37). Wprowadzając bowiem zmienne zastępcze

$$\bar{E}_\rho = \frac{1}{\sqrt{\rho}} E_\rho \quad (1.45a)$$

$$\bar{E}_\varphi = \sqrt{\rho} E_\varphi \quad (1.45b)$$

$$\bar{E}_z = \frac{1}{\sqrt{\rho}} E_z \quad (1.45c)$$

oraz identycznie normalizując pola magnetyczne, równanie Faradaya można zapisać jako

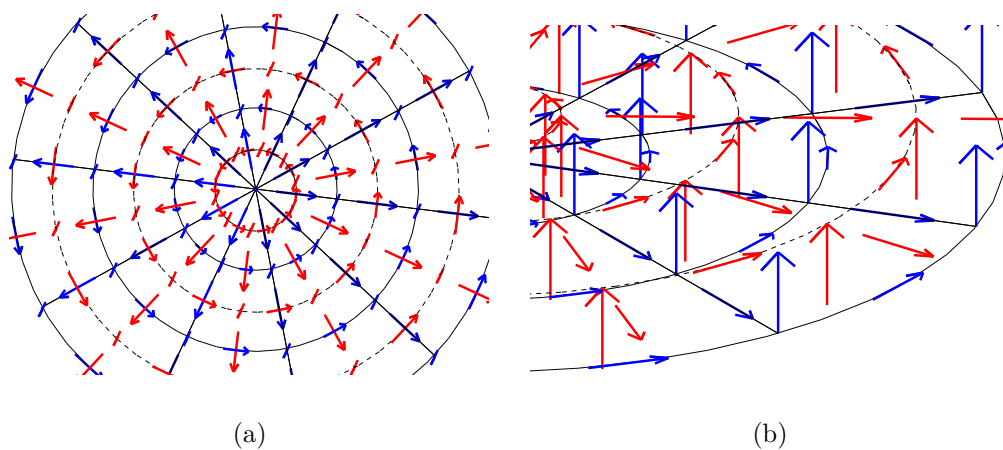
$$-j\omega\mu \begin{bmatrix} \overline{H}_\rho \\ \overline{H}_\varphi \\ \overline{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial\rho} \\ -\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{E}_\rho \\ \overline{E}_\varphi \\ \overline{E}_z \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

czyli postać macierzy rotacji jest identyczna jak w układzie kartezjańskim. W dziedzinie dyskretniej przejście z układu kartezjańskiego do cylindrycznego uzyskuje się poprzez użycie współczynników metryki zdyskretyzowanych w odpowiednich węzłach siatki (1.45), co w sensie zapisu jest równoważne utworzeniu sztucznego, anizotropowego ośrodka o tensorach przenikalności [35]:

$$\overline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & & \\ & \sqrt{\rho} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \quad (1.47a)$$

$$\overline{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & & \\ & \sqrt{\rho} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \quad (1.47b)$$

Dzięki takim przekształceniom, problem (1.41) pozostaje symetryczny także w układzie cylindrycznym. Tensory (1.47) pozwalają na przekształcenie prostokąta w wycinek cylindra. Przejście do pełnego cylindra wymaga "sklejenia" brzegów wzdłuż wybranej płaszczyzny $\varphi = const$ oraz zdefiniowania pola w środku układu. O ile to pierwsze jest trywialne, sprowadza się bowiem do wymuszenia równości elementów z lewego i prawego brzegu „prostokąta” o tyle definicja środka wymaga wymaga dodatkowych wyjaśnień.



RYСУNEK 1.4: Rozmieszczenie próbek pola w siatce Yee w układzie cylindrycznym. Ogólny rzut (a) oraz zbliżenie (b)

Równania dla $\rho = 0$

Definicja równań Maxwella we współrzędnych cylindrycznych wymaga rozwiązania problemu osobliwości w $\rho = 0$. Z oczywistych względów, może tam być określona jedynie składowa E_z lub H_z . Aby ją znaleźć należy skorzystać z zależności definicyjnej rotacji

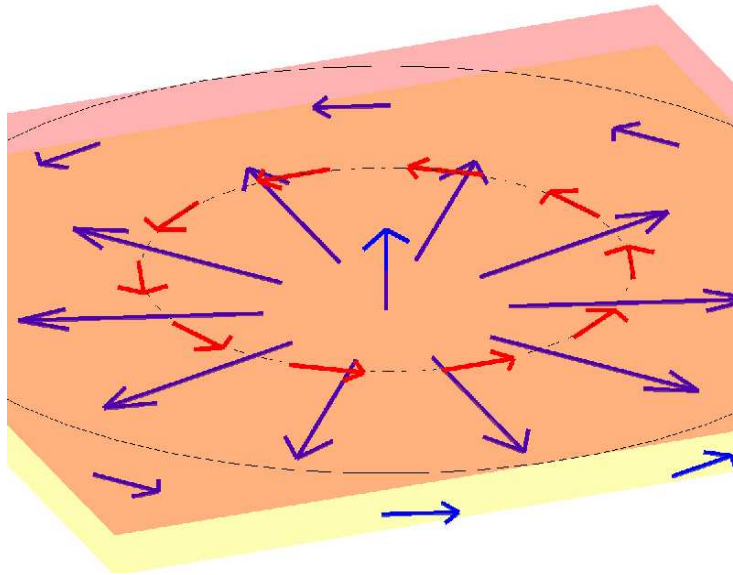
$$(\nabla \times E) \cdot \mathbf{i}_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S E_\varphi \rho d\varphi}{S} \quad (1.48)$$

gdzie S jest powierzchnią ograniczoną przez kontur całki (1.48). Pozwala to zdefiniować równanie Faradaya dla $\rho = 0$ jako

$$E_z \Delta S = j\omega\mu \oint_S H_\varphi dl \quad (1.49)$$

co w dziedzinie próbek można zapisać w postaci równania

$$E_z(0, l) = j\omega \frac{\pi \Delta \rho^2}{4 \Delta \varphi} \sum_n H_\varphi(1, n, l) \quad (1.50)$$



RYSUNEK 1.5: Wartość próbki składowej E_z w środku układu współrzędnych oblicza się korzystając z cyrkulacji składowej H_φ .

1.6.3 Rozwinięcia funkcyjne w strukturach jednorodnych

Ostatnim zagadnieniem omówionym w ramach dyskusji metod różnic skończonych będzie technika rozwinięć funkcyjnych, która także była punktem wyjścia dla metod projekcji stanowiących temat niniejszej rozprawy. Idea rozwinięć funkcyjnych pojawia się w pod nazwą *Partial Eigenfunction Expansion* [47, 68–70, 75] a także, dla struktur cylindrycznych o symetrii obrotowej jako *Body of Revolution* [19, 35, 51]. Niech pola elektromagnetyczne będą wyrażone w postaci:

$$\begin{aligned} E_x &= {}^x \mathbf{f}(x, z) \sin(my) \\ E_y &= {}^y \mathbf{f}(x, z) \cos(my) \\ E_z &= {}^z \mathbf{f}(x, z) \sin(my) \end{aligned} \quad (1.51)$$

oraz

$$\begin{aligned} H_x &= {}^x\mathbf{g}(x, y) \cos(my) \\ H_y &= {}^y\mathbf{g}(x, y) \sin(my) \\ H_z &= {}^z\mathbf{g}(x, y) \cos(my) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Definicja równania Faradaya z użyciem (1.51) pozwala zapisać pole H w następującej postaci

$$\begin{aligned} \mu {}^x\mathbf{g}(x, z) \cos(my) &= j\omega \left(m {}^z\mathbf{f}(x, z) \cos(my) - \frac{\partial}{\partial z} {}^y\mathbf{f}(x, z) \cos(my) \right) \\ \mu {}^y\mathbf{g}(x, z) \sin(my) &= j\omega \left(-\frac{\partial}{\partial x} {}^z\mathbf{f}(x, z) + \frac{\partial}{\partial z} {}^x\mathbf{f}(x, z) \right) \sin(my) \\ \mu {}^z\mathbf{g}(x, z) \cos(my) &= j\omega \left(m {}^x\mathbf{f}(x, z) \cos(my) + \frac{\partial}{\partial x} {}^y\mathbf{f}(x, z) \cos(my) \right) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Przy podstawieniach (1.51), (1.52) i (1.53) operator rotacji można zapisać równoważnie jako

$$\nabla \times \begin{bmatrix} {}^x\mathbf{g} \\ {}^y\mathbf{g} \\ {}^z\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & m \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ m & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^x\mathbf{g} \\ {}^y\mathbf{g} \\ {}^z\mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

gdzie jako \mathbf{g} zakłada się funkcję zależne wyłącznie od x i z .

W podobny sposób można zdefiniować zależności dla układu cylindrycznego [19, 35]. W przypadku struktur jednorodnych w kierunkach, w których stosuje się rozwinięcie harmoniczne możliwa jest niezależna analiza pól o różnych zmiennosciach. Technika ta, w połączeniu ze spójnym formalizmem pozwalającym definiować schematy hybrydowe pozwala znacznie poprawić wydajność metody różnic skończonych dla układów, w których wyodrębnić można obszary jednorodne/osiowo symetryczne.

Rozdział 2

Metody rzutowe w rozwiązywaniu zagadnień elektromagnetycznych

Niniejszy rozdział poświęcony jest krótkiej prezentacji metod bazujących na projekcji Rayleigha-Ritza [36, 66], polegającej na rozwiązaniu zagadnienia operatorowego w innej przestrzeni niż pierwotnie zostało zdefiniowane. W szczególności, problemy zdefiniowane w nieskończenie wymiarowej przestrzeni \mathcal{L}_2 można przekształcić do równania macierzowego w przestrzeni \mathcal{R}^n . Metoda ta może zatem być postrzegana jako alternatywny sposób dyskretyzacji problemu ciągłego. W zastosowaniach elektrodynamiki obliczeniowej rzutowanie Rayleigha-Ritza kojarzy się głównie z Metodą Momentów [36, 41, 50], przez wiele lat będącą wspólnie z metodami wariacyjnymi [11, 37], podstawowym narzędziem analizy polowej. Obie metody analizy zresztą doskonale się uzupełniały – rozwiązania otrzymane za pomocą Metody Momentów stawały się argumentem odpowiedniego funkcjonału, co pozwalało poprawić dokładność wyniku [11, 78].

W czasach, kiedy możliwości obliczeniowe komputerów były niewielkie, Metoda Momentów była stosowana głównie do dyskretyzacji operatorów całkowych, związanych z funkcją Greena. Takie podejście pozwalało definiować małe układy równań liniowych, kosztem znacznego wysiłku związanego z ich zdefiniowaniem. Wraz z rozwojem komputerów rosło zainteresowanie technikami bardziej uniwersalnymi, które większość pracy obliczeniowej przetrzuciły na komputery.

Począwszy od lat 60-tych nastąpił stopniowy rozwój metod siatkowych. Większość z nich można wyrazić jako projekcję Rayleigha-Ritza operatorów różniczkowych na proste bazy, takie jak wielomiany niższego rzędu (FEM) czy falki Haara (MRTD, FDTD). Szczególnie Metoda Różnic Skończonych pozwala zbudować problem liniowy znikomym kosztem, co w połączeniu z otwartym sformułowaniem czasowym pozwala definiować problemy o rozmiarze rzędu milionów zmiennych. Metoda Momentów w klasycznym rozumieniu, czyli jako metoda dyskretyzacji operatorów całkowych wciąż znajduje zastosowanie w problemach rozpraszania, czy propagacji, czyli zdefiniowanych dla nieskończonej dziedziny obliczeniowej.

Konieczność rozwiązywania ogromnych zagadnień liniowych, zdefiniowanych przy użyciu metod siatkowych otwiera nowy rozdział metod rzutowych. Formalizm Rayleigha-Ritza przenosi się w przestrzeń dyskretną, a rzutowanie ma na celu nie dyskretyzację problemu, lecz zmniejszenie jego rozmiaru. Rzutowanie w przestrzeni euklidesowej jest podstawą wielu iteracyjnych algorytmów rozwiązywania układów równań [4, 8, 94], czy problemów własnych [4]. Dobieranie optymalnych podprzestrzeni do rozwiązywania układów równań liniowych jest bezpośrednio związane z technikami redukcji rzędu modelu [14, 52]. Wszystkie

te algorytmy traktują jednak operator macierzowy w sposób mniej lub bardziej oderwany od fizyki rozpatrywanego zjawiska. Choć propozycje opisane w niniejszej pracy również mieszczą się w ogólnym pojęciu projekcji Rayleigha-Ritza w przestrzeni \mathcal{R}^n , to wyróżnia je bardzo „fizyczne” podejście do problemu. W odróżnieniu od wymienionych metod, podprzestrzenie projekcyjne konstruowane są bezpośrednio w oparciu o znane lub przewidywane własności pól elektromagnetycznych.

2.1 Definicja Metody Momentów

Niech dany będzie liniowy operator \mathcal{A} zdefiniowany w dowolnej przestrzeni Hilberta (np. \mathcal{L}_2) oraz wymuszenie \mathbf{b} . Niech będzie określony problem ze względu na nieznaną funkcję \mathbf{f} postaci

$$\mathcal{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (2.1)$$

Przybliżone rozwiązanie $\tilde{\mathbf{f}}$ problemu (2.1) zakłada się w postaci skończonego szeregu funkcji \mathbf{v}^m

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{m=1}^M f_m \mathbf{v}^m \quad (2.2)$$

Podstawiając (2.2) do (2.1) i korzystając z liniowości \mathcal{A} otrzymuje się

$$\sum_{m=1}^M f_m \mathcal{A}\mathbf{v}^m = \mathbf{b} \quad (2.3)$$

Uzyskanie równości lewej i prawej strony, ze względu na skończoność szeregu (2.2) jest możliwe w ograniczonej liczbie sformułowań, nie mających zwykle praktycznego zastosowania. Przekształcenie (2.3) do układu równań liniowych wymaga zdefiniowania pewnej podprzestrzeni testującej \mathcal{W} . Żądanie, aby rzuty obu stron na pewną podprzestrzeń testującą \mathcal{W} były sobie równe, w formalizmie przestrzeni Hilberta można zapisać jako

$$\forall \mathbf{w}^n \in \mathcal{W} \quad \langle \mathbf{w}^n, \sum_{m=1}^M f_m \mathcal{A}\mathbf{v}^m \rangle = \langle \mathbf{w}^n, \mathbf{b} \rangle \quad (2.4)$$

co można przekształcić, korzystając z własności iloczynu skalarnego, do postaci

$$\sum_{m=1}^M \langle \mathbf{w}^n, \mathcal{A}\mathbf{v}^m \rangle f_m = \langle \mathbf{w}^n, \mathbf{b} \rangle \quad (2.5)$$

Definiując funkcję (wektor) residualny (szczętkowy) jako

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{b} \quad (2.6)$$

warunek (2.4) i (2.5) można zwięźle przepisać jako

$$\forall \mathbf{w}^n \in \mathcal{W} \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{w}^n \rangle = 0 \quad (2.7)$$

Wyrażenie (2.7) oznacza, że wektor (funkcja) residualny \mathbf{r} jest prostopadły do całej przestrzeni testującej.

Na podstawie (2.4) można napisać równanie macierzowe, odpowiadające (2.1),

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (2.8)$$

w którym poszukiwany wektor \mathbf{f} zawiera współczynniki f_m (2.2), natomiast \mathbf{A} i \mathbf{b} są określone następująco

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}^1, \mathcal{A}\mathbf{v}^1 \rangle & \langle \mathbf{w}^1, \mathcal{A}\mathbf{v}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}^1, \mathcal{A}\mathbf{v}^M \rangle \\ \langle \mathbf{w}^2, \mathcal{A}\mathbf{v}^1 \rangle & \langle \mathbf{w}^2, \mathcal{A}\mathbf{v}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}^2, \mathcal{A}\mathbf{v}^M \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{w}^M, \mathcal{A}\mathbf{v}^1 \rangle & \langle \mathbf{w}^M, \mathcal{A}\mathbf{v}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}^M, \mathcal{A}\mathbf{v}^M \rangle \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}^1, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{w}^2, \mathbf{b} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}^N, \mathbf{b} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Zależności (2.2)-(2.9) definiują metodę rzutowania Rayleigha-Ritza. W jej formalizm można ująć zarówno metodę momentów, jak i metody siatkowe, takie jak FEM (niektóre sformułowania) [27], FDTD [49, 81], metody MRTD [28, 48]. Pomimo zwięzłości powyższego zapisu jego implementacja jest często bardzo złożona [36].

2.1.1 Dobór funkcji bazowych

Oczywiste jest, że odpowiedni dobór zarówno funkcji bazowych \mathbf{v} jak i testujących \mathbf{w} radykalnie wpływa na wydajność rozwiązania problemu (2.2). Odpowiedni wybór przestrzeni bazowej i testującej oznacza nie tylko takie ich zdefiniowanie aby przybliżyć szukaną funkcję \mathbf{f} możliwie krótkim szeregiem, lecz także tak, by uzyskać pożądane własności rozwiązywanego układu równań liniowych. Zakładając klasyczną definicję algorytmu w przestrzeni funkcji ciągłych i całkowalnych z kwadratem, \mathcal{L}_2 , z iloczynem skalarnym

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}\mathbf{v} \, d\Omega, \quad (2.11)$$

można zdefiniować następujące strategie doboru podprzestrzeni projekcyjnych:

Metoda Galerkina

Metoda Galerkina polega na użyciu tej samej przestrzeni jako bazowej i testującej. Wybór taki jest uzasadniony szczególnie w przypadku rzutowania operatorów samosprężonych. Projekcja (2.9) operatora \mathcal{A} prowadzi wtedy do identycznego rezultatu jak zastosowanie metody Ritza do odpowiadającego \mathcal{A} zagadnienia wariacyjnego. Szczegółowe rozważania na ten temat można znaleźć w [27]. Uzyskanie macierzy problemu takiej samej, jaką uzyska się z dyskretyzacji problemu wariacyjnego jest bardzo cenne, gdyż gwarantuje szybszą zbieżność i mniejszą wrażliwość na błędy takiego sformułowania.

Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów polega na związaniu funkcji bazowych i testujących następującą relacją

$$\mathbf{w}^m = \mathcal{A}\mathbf{v}^m \quad (2.12)$$

Jak pokazano w [27] projekcja taka daje macierz, której rozwiązanie ma najmniejszy błąd średniokwadratowy, mierzony jako norma wektora residualnego. Taki sposób doboru wektorów bazowych jest rzadko stosowany, ze względu na problemy rachunkowe w przypadku przestrzeni ciągłych i problemy z dyspersją numeryczną [8] w przypadku rzutowania w przestrzeniach euklidesowych.

Metoda kolokacji

Metoda kolokacji jest dość często stosowana do dyskretyzacji problemu ciągłego. Polega ona na użyciu funkcji testujących w postaci delt Diraca $\mathbf{w}^m = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)$. Otrzymuje się wtedy spełnienie równości (2.4) w wybranych punktach przestrzeni \mathbf{r}_m . Wybór takich funkcji testujących ma ogromne znaczenie z punktu widzenia kosztu stworzenia macierzy (2.9). Przykładowo, dla typowego iloczynu skalarnego w \mathcal{L}_2 i funkcji Greena dwuwymiarowego operatora Laplace'a¹, pojedynczy element macierzy (2.9) wyznacza się obliczając całkę

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x'_1}^{x'_2} \int_{y'_1}^{y'_2} \mathbf{w}(x, y) \frac{\mathbf{v}(x - x', y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy' dx dy \quad (2.13)$$

Użycie $\delta(x - x_0, y - y_0)$ jako funkcji testującej upraszcza wyrażenie (2.13), do postaci

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \int_{y'_1}^{y'_2} \frac{\mathbf{v}(x_0 - x', y_0 - y')}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}} dx' dy', \quad (2.14)$$

co w wielu przypadkach w ogóle umożliwia jej obliczenie, w szczególności, gdy punkt (x_0, y_0) należy do obszaru całkowania (2.14) i Funkcja podcałkowa posiada wtedy osobliwość.

2.1.2 Rzutowanie operatora drugiego rzędu z wykorzystaniem nieciągłych funkcji bazowych

Istotnym zagadnieniem związanym z definiowaniem metod siatkowych w formalizmie Rayleigha-Ritza jest rzutowanie problemu drugiego rzędu z użyciem nieciągłych funkcji bazowych. Funkcje takie stosowane są w najpopularniejszych metodach siatkowych, spełniają bowiem postulat minimalizacji kosztu dyskretyzacji. Aby przedyskutować zagadnienia związane z implementacją Metody Momentów dla nieciągłych funkcji bazowych, omówiona zostanie projekcja operatora drugiego rzędu w jednym wymiarze,

$$\mathcal{A}\mathbf{f} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{f}(x) \quad (2.15)$$

Przy projekcji (2.3) operatora \mathcal{A} od funkcji bazowych \mathbf{v}^m wymaga się co najmniej ciągłości funkcji i jej pochodnej. Warunki te można osłabić całkując przez części

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(x) \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{f}(x) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dx}\mathbf{w}(x) \frac{d}{dx}\mathbf{v}(x) dx \quad (2.16)$$

W całkowaniu (2.16) założono zerowanie się co najmniej jednej z funkcji lub jej pochodnej na brzegu obszaru, co wyeliminowało składnik $\mathbf{w}(x) \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{f}(x)$ z (2.16). Sformułowanie (2.16)

¹Dla uproszczenia pominięto współczynnik skalujący $\frac{1}{4\pi}$

pozwała zastosować funkcje bazowe i testujące posiadające pierwszą pochodną, która nie musi być jednak ciągła. W ten sposób klasa dopuszczalnych funkcji bazowych rozszerza się między innymi o elementy Lagrange’a, stosowane w metodzie elementów skończonych [27, 95, 96]. Dalsze osłabienie wymagań odnośnie funkcji bazowych tak, by przestrzenie bazowe i testujące można było budować na funkcjach nieciągłych, wymaga rozbicia (2.15) na układ równań pierwszego rzędu (z wymuszeniem \mathbf{b}):

$$\frac{d}{dx}\mathbf{g}(x) = \mathbf{b}(x) \quad (2.17a)$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x) \quad (2.17b)$$

Niech teraz przybliżony opis funkcji $\mathbf{f}(x)$ jak i $\mathbf{g}(x)$ ma postać szeregu

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) = \sum_{m=1}^M f_m \mathbf{v}^m(x) \quad (2.18a)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(x) = \sum_{m=1}^M g_m \mathbf{w}^m(x) \quad (2.18b)$$

przy czym wybrana funkcja \mathbf{v}^m będzie nieciągła. Można ją rozbić wtedy na sumę funkcji ciągłej ${}^c\mathbf{v}^m$ oraz pewnej liczby uskoków Heaviside’a $\mathbf{1}(x)$

$$\mathbf{v}^m = {}^c\mathbf{v}^m(x) + a_n \sum_n \mathbf{1}(x - x_n) \quad (2.19)$$

Pochodna wyrażenia (2.19) zawiera zatem pewną liczbę delt Diraca. Aby możliwe było całkowanie iloczynu pochodnej (2.19) i wybranej funkcji testującej, od tej drugiej wymaga się, aby jej punkty osobliwe, jeśli istnieją, występowały w innych miejscach przestrzeni niż punkty osobliwe \mathbf{v}^m . W powyższy sposób klasę funkcji nadających się do projekcji można rozszerzyć o funkcje nieciągłe. Przypadek taki ma miejsce przy definiowaniu schematów MRTD w oparciu o fale Haara. Nieciągłych funkcji bazowych używa się także w Metodzie elementów skończonych do aproksymacji skokowych zmian ośrodka [2, 3]. We wszystkich przypadkach stosuje się rozbitcie operatora drugiego rzędu w sposób podobny do przedstawionego w wyrażeniu (2.17) a jako funkcji testujących stosuje się funkcji bazowych przesuniętych o pewną stałą.

2.2 Metody siatkowe jako szczególny przypadek Metody Momentów

Metody siatkowe, można budować poprzez rzutowanie operatorów różniczkowych z użyciem możliwie prostych funkcji bazowych i testujących, dla których koszt budowy macierzy (2.9) jest minimalny. Jest to istotna różnica w porównaniu do typowych sformułowań Metody Momentów gdzie dyskretyzowane są operatory całkowite. Często dyskretyzacja taka jest bardziej pracochłonna od samego rozwiązania problemu. Dla kontrastu, metody siatkowe buduje się na bazie sformułowania różniczkowego a jako funkcji bazowych używa się falek Haara (FDTD, MRTD), wielomianów niższego rzędu (FEM), czy też, innego rodzaju falek, np. Battle-Lemarie [48] czy Daubechies [29]. Celem poniższego podrozdziału jest przedstawienie wybranych metod siatkowych w kontekście rzutowania Rayleigha-Ritza.

2.2.1 Określenie metody siatkowej

Interesujące z punktu widzenia niniejszej pracy metody siatkowe bazują na dyskretyzacji równań Maxwella w postaci różniczkowej. Dyskretyzuje się układ równań pierwszego rzędu z użyciem bardzo prostych funkcji bazowych, które definiuje się najczęściej przesuwając i skalując w przestrzeni pewną funkcję macierzystą [81]. Popularne metody takie jak Metoda Elementów Skończonych, a w szczególności Metoda Elementów Brzegowych nie mieszczą się w tych ramach, dlatego dla potrzeb dalszych rozważań pojęcie metod siatkowych zostanie zawężone do takich technik jak FDTD, czy MRTD.

Niech dany będzie operator rotacji $\nabla \times$, zdefiniowany jak w (1.28),

$$\nabla \times \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathbf{f}} \\ y_{\mathbf{f}} \\ z_{\mathbf{f}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Jeśli przybliżone wartości pól elektrycznego E i magnetycznego H wyrażone są w postaci szeregu analogicznego do (2.18),

$$\sqrt{\varepsilon} \tilde{E} = \sum_{m=1}^M e_m \mathbf{v}^m \quad (2.21a)$$

$$\sqrt{\mu} \tilde{H} = \sum_{m=1}^M h_m \mathbf{w}^m \quad (2.21b)$$

to projekcja układu równań Maxwella wygląda (w jednorodnym ośrodku) następująco:

$$c \nabla \times \sum_{k=1}^M e_k \mathbf{v}^k = -j\omega \sum_{k=1}^M h_k \mathbf{w}^k \quad (2.22a)$$

$$c \nabla \times \sum_{k=1}^M h_k \mathbf{w}^k = j\omega \sum_{k=1}^M e_k \mathbf{v}^k \quad (2.22b)$$

Dokonując rzutowania obu stron na wektory testujące, a dokładnie równania Faradaya na wektory \mathbf{w}^m a równania Ampera na \mathbf{v}^m , otrzymuje się macierzowy układ równań

$${}^c \mathbf{L} \mathbf{e} = -j\omega {}^w \mathbf{M} \mathbf{h} \quad (2.23a)$$

$${}^c \mathbf{L}^T \mathbf{h} = j\omega {}^v \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (2.23b)$$

z macierzami zdefiniowanymi odpowiednio jako:

$${}^c L_{m,n} = \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \nabla \times \mathbf{v}^n d\Omega \quad (2.24)$$

$${}^w M_{m,n} = \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \mathbf{w}^n d\Omega \quad (2.25)$$

$${}^v M_{m,n} = \int_{\Omega} \mathbf{v}^m \mathbf{v}^n d\Omega \quad (2.26)$$

Krótkiej dyskusji wymaga związek ${}^c\mathbf{L}$ i ${}^c\mathbf{L}^T$ (2.23). Wychodząc z tożsamości wektorowej

$$\nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{w}\nabla \times \mathbf{v} \quad (2.27)$$

spełnionej w każdym punkcie dziedziny, można powyższy warunek uczynić globalnym poprzez scałkowanie obu stron w obrębie dziedziny:

$$\int_{\Omega} \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{v}\nabla \times \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{w}\nabla \times \mathbf{v}) d\Omega \quad (2.28)$$

Lewa strona (2.28) na mocy twierdzenia Gaussa równa jest całce powierzchniowej z $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ przez zorientowaną powierzchnię otaczającą dziedzinę Ω . Jeśli iloczyn ten zeruje się na brzegu, albo jest do niego prostopadły, lewa strona (2.28) jest równa zeru.

Niech funkcje bazowe \mathbf{v}^m i testujące \mathbf{w}^m będą tak dobrane, aby przyjmowały niezerowe wartości jedynie na niewielkim podobszarze dziedziny Ω . Wtedy większość elementów macierzy (2.24), (2.25) i (2.26) będzie zerowa. Ponadto, niech funkcje te zdefiniowane są w szczególny sposób - z wykorzystaniem pewnej funkcji macierzystej \mathbf{u} , zależnej od jednej tylko zmiennej przestrzennej. Wektory bazowe mogą zostać zdefiniowane w przestrzeni jako [48, 49, 81]:

$$\mathbf{v}^m(x, y, z) = \mathbf{u}(x - m_{1,n})\mathbf{u}(y - m_{2,n})\mathbf{u}(z - m_{3,n}) \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{w}^m(x, y, z) = \mathbf{u}(x - m'_{1,n})\mathbf{u}(y - m'_{2,n})\mathbf{u}(z - m'_{3,n}) \quad (2.29b)$$

Zbiór ${}^e\mathcal{M}$ uporządkowanych trójek $m_{1,n}, m_{2,n}$ i $m_{3,n}$, oraz ${}^h\mathcal{M}$, zawierający uporządkowane trójki $m'_{1,n}, m'_{2,n}$ i $m'_{3,n}$ można utożsamiać z podziałem dziedziny na siatkę. Oczywiście można zdefiniować izomorfizm między zbiorem indeksów m (2.29) a elementami ${}^e\mathcal{M}$ i ${}^h\mathcal{M}$. Jako, że nie jest on jawnie używany w dalszych rozważaniach, jego definicja zostanie pominięta. Indeks funkcji bazowej (lub testującej), w zależności od użytej funkcji macierzystej \mathbf{u} , ma mniejszy lub większy związek z jej położeniem wewnątrz dziedziny. Jako skrajne przykłady można podać z jednej strony zaprezentowaną w poprzednim rozdziale siatkę Yee, z drugiej falkę Battle-Lemarie o nieskończonym nośniku [48]. W ten sposób większość elementów macierzy (2.24) ma wartość równą 0. Funkcje postaci (2.29), pozwalają na automatyzację obliczania współczynników macierzy (2.9). Okazuje się bowiem [25, 48], że dyskretyzując operator rotacji (2.20), odpowiednie elementy macierzy (2.9) można otrzymać na podstawie współczynników

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x) \frac{d}{dx} \mathbf{u}(x - n - d) dx \quad (2.30)$$

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x) \mathbf{u}(x - n) dx \quad (2.31)$$

W powyższych wyrażeniach, założono $m_{1,n} = n$ oraz $m'_{1,n} = n - d$. Stała d jest w tym przypadku miarą przesunięcia siatki głównej i dualnej. Macierz ${}^c\mathbf{L}$ (2.24) zawiera elementy (2.30), (2.31) oraz ich iloczyny. Generalnie jednak koszt numeryczny budowy takiej macierzy radykalnie maleje. Dla typowo stosowanych funkcji bazowych, wspomniane współczynniki są stabelaryzowane, nie ma zatem konieczności każdorazowego ich obliczania. Tworzenie macierzy ${}^c\mathbf{L}$ jest szczególnie proste gdy współczynniki b_n są równe 0 dla $n \neq 0$. Wymaga

to użycia ortogonalnych funkcji bazowych i testujących, co w świetle (2.29) można wyrazić następująco:

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x - n) \rangle = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Do funkcji o takich własnościach należą właśnie falki i stąd próby budowy metod siatkowych z ich użyciem [28, 29, 48].

Przedstawiony powyżej wywód dotyczy oczywiście niektórych tylko metod siatkowych, jednak te właśnie są szczególnie interesujące z punktu widzenia metod projekcji przedstawionych w następnym rozdziale. Bardzo popularna Metoda Elementów Skończonych wymaga budowy operatora w bardziej kosztowny sposób, współczynniki macierzy muszą bowiem być obliczane indywidualnie dla każdej z poddziedzin (elementu). Jest to cena jaką płaci się za łatwą możliwość analizy struktur o nietypowej geometrii.

2.3 Metoda Momentów w dziedzinie czasu

Metodę Momentów można zdefiniować w dziedzinie czasu, czyli dyskretyzować (metodą Rayleigha-Ritza) nie tylko zmienne przestrzenne ale i czasową. Schemat Rayleigha-Ritza zastosowany w takiej sytuacji przeważnie wykorzystuje funkcje, gdzie zmienność czasowa i przestrzenna są rozseparowane, czyli np. pole elektryczne można opisać zależnością

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1, m=1}^{N, M} \mathbf{F}^n(\mathbf{r}) \mathbf{f}^m(t) \quad (2.33)$$

Jako $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ można podstawić dowolne funkcje stosowane w Metodzie Momentów. Natomiast dobór funkcji $\mathbf{f}^m(t)$ może być przeprowadzony dwojako. Po pierwsze, można użyć funkcji określonych na całej dodatniej półosi np. wielomiany Laguerre'a [63, 91]. Tego typu sformułowania, choć stanowią absolutny margines sformułowań czasowych, stosować można do analizy stanów przejściowych w strukturach rozpraszających. Co ciekawe, dyskretyzując w podobny sposób odpowiedź impulsową np. struktury prowadzącej, można wyprowadzić dobre warunki absorpcyjne dla metody FDTD [73, 74].

Typowe sformułowanie Metody Momentów w dziedzinie czasu można by określić jako Metoda Momentów w przestrzeni i różnic skończonych w czasie [68]. Zmienność czasowa w równaniach Maxwella zastępowana jest bowiem przybliżeniem różnicowym np. (1.2). Podstawienie takie, przykładowo dla równania Faradaya wygląda następująco:

$$c\Delta t \mathbf{Re}^{k+1} = -{}^w\mathbf{M}(\mathbf{h}^{k+1} - \mathbf{h}^k) \quad (2.34)$$

Uzyskanie otwartego schematu, podobnego do FDTD (1.31) wymaga faktoryzacji macierzy ${}^w\mathbf{M}$ (2.25), co jest kosztowne numerycznie, choć bywa stosowane, szczególnie w implementacji Metody Elementów Skończonych w dziedzinie czasu [60]. Innym rozwiązaniem problemu jest wybór bazy ortogonalnej, co daje jednostkowe macierze (2.25) i (2.26). Do funkcji ortogonalnych należą właśnie wszelkiego rodzaju bazy falkowe, funkcje harmoniczne, czy impulsy prostokątne. Każda z wymienionych rodzin funkcji jest stosowana w elektrodynamice obliczeniowej, odpowiednio w technice MRTD, PEE i FDTD.

Przykład 2.1 Metoda Różnic Skończonych w dziedzinie czasu jako szczególny przypadek Metody Momentów. Jako przykład tworzenia algorytmu siatkowego w oparciu o projekcję Rayleigha-Ritza zostanie przytoczony przykład tworzenia Metody Różnic

skończonych w dziedzinie czasu. Niech dana będzie funkcja macierzysta:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{pozostałe } x \end{cases} \quad (2.35)$$

Na jej podstawie przestrzeń bazową i testującą można utworzyć jako:

$$\mathbf{v}^m = \mathbf{u}(x - m) \quad m \in \mathcal{Z} \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{w}^n = \mathbf{u}\left(x - n - \frac{1}{2}\right) \quad n \in \mathcal{Z} \quad (2.36b)$$

Użycie funkcji (2.36) sprawia, że odpowiednie macierze metryczne (2.25),(2.26) są ortogonalne i jednostkowe, natomiast macierz ${}^c\mathbf{L}$ (2.24), ma postać

$${}^c\mathbf{L}_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ -1 & m + 1 = n \end{cases} \quad (2.37)$$

Oznacza to, że dyskretyzacja Rayleigha-Ritza z użyciem funkcji bazowych (2.36) daje dokładnie taki sam rezultat, jak bezpośrednia implementacja ilorazu różnicowego (1.2). Podobne rozważanie można spotkać w literaturze, np. [49, 81].

2.3.1 Metody siatkowe wykorzystujące falki

Falki, jako funkcje bazowe są szeroko stosowane w różnych dziedzinach przetwarzania sygnału. Szczególnie w obszarach związanym z przetwarzaniem dźwięku i obrazu falki stały się typowym narzędziem [33, 101]. W elektrodynamice obliczeniowej podejmowane były liczne próby ich użycia jako alternatywy FDTD [28, 48], jak dotąd nie zdobyły one jednak szerszej popularności.

Falki jako funkcje bazowe

Niech dany będzie ciąg podprzestrzeni \mathcal{K}^m o własności

$$\mathcal{K}^m \subset \mathcal{K}^{m+1} \quad (2.38)$$

Funkcja $\mathbf{f}(x)$ należąca do przestrzeni \mathcal{K}^m ma własności:

$$\mathbf{f}(x) \in \mathcal{K}^m \Leftrightarrow \mathbf{f}(2x) \in \mathcal{K}^{m+1} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f}(x) \in \mathcal{K}^m \Leftrightarrow \mathbf{f}(x - n) \in \mathcal{K}^m \quad (2.40)$$

Aby zagwarantować możliwość aproksymacji dowolnej funkcji z \mathcal{L}_2 za pomocą elementów przestrzeni \mathcal{K}^m , konieczne jest, aby topologiczne domknięcie iloczynu uogólnionego przestrzeni \mathcal{K}^m było równoważne z \mathcal{L}_2 . Zakłada się, że istnieje również funkcja $\mathbf{g}(x)$, taka, że zbiór

$$\{\mathbf{g}(x - n), \quad n \in \mathcal{Z}\} \quad (2.41)$$

rozpinają przestrzeń \mathcal{K}^m . Z funkcji $\{\mathbf{g}(x - n)\}$ można utworzyć bazę ortogonalną. Z kolei własność (2.39) oznacza, że zagęszczając funkcje można budować kolejne przestrzenie, które

pozwalają coraz dokładniej przybliżać szybkozmiennie funkcje. Aproksymacja funkcji wolnozmiennych może natomiast być dokonana z użyciem niewielu funkcji bazowych. Niech będzie ustalona przestrzeń \mathcal{K}^0 i funkcją macierzystą $\phi(x)$ (*scalet*) taka, że rodzina funkcji

$$\phi_n(x) \equiv \phi(x - n) \quad n \in \mathcal{Z} \quad (2.42)$$

rozpinają przestrzeń \mathcal{K}^0 , oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x - n)dx = \delta_n \quad (2.43)$$

Z kolei falką (*wavelet*) będzie nazywana funkcja $\psi(x)$ należąca do \mathcal{K}^1 , ortogonalna względem przesunięcia (2.43), której przesunięcia (2.40) rozpinają przestrzeń $\mathcal{K}^1 \setminus \mathcal{K}^0$. Odpowiednio, falki wyższych rzędów definiuje się jako ortogonalne względem przesunięcia funkcje bazowe przestrzeni $\mathcal{K}^m \setminus \mathcal{K}^{m-1}$. W typowych zastosowaniach nie rozróżnia się funkcji macierzystej od falek, traktując ją jako falkę rzędu zerowego.

Jak widać, własności te doskonale przystają do postulowanych w podrozdziale 2.2. Stąd, liczne próby zaadaptowania ich do celów elektrodynamiki obliczeniowej [28, 29, 48, 81, 97]. Najszerzej dyskutowane w literaturze były falki Haara [28, 97], były też próby zastosowania falek Daubechies [29] oraz, Battle-Lemarie [48]. Poważną wadą większości z nich jest znaczna rozciągłość w przestrzeni, co powoduje konieczność zdefiniowania wielu współczynników a_n (2.30). Przykładowo, jeśli FDTD wymaga zdefiniowania 2 współczynników, schemat czasowy z użyciem falek Haara pierwszego rzędu [28] czterech, natomiast algorytm z falkami Battle-Lemarie [48] już 18. Autorzy utrzymują, że zastosowanie wspomnianej bazy pozwala obniżyć liczbę funkcji na długość fali do granicy Nyuquista, co jednak, zważywszy na ilość operacji zmiennoprzecinkowych na jedną zmienną, nie poprawia wydajności obliczeniowej wspomnianego algorytmu.

Jako, że falki nie są głównym tematem niniejszej pracy, ich tworzenie, które jest bardzo żmudną operacją nie będzie szczegółowo omówione. Odpowiednie wyprowadzenia można znaleźć w [81] czy [21]. Przykłady zaś użycia ich w algorytmach hybrydowych dyskutowane będą w następnym rozdziale.

2.4 Projekcja w przestrzeni \mathcal{R}^n

Do tej pory przedstawiono zarys Metody Momentów zdefiniowanej w przestrzeni ciągłej \mathcal{L}_2 , czyli tak, jak przeważnie prezentuje się ją w literaturze. Trzeba jednak pamiętać, że formalizm Rayleigha-Ritza jest zdefiniowany dla każdej przestrzeni wyposażonej w iloczyn skalarny, w szczególności zatem \mathcal{R}^n . Zastosowanie metod siatkowych do dyskretyzacji zagadnień brzegowych prowadzi do zdefiniowania układów równań bądź problemów własnych o ogromnych rozmiarach, za to z macierzami rzadkimi. Zagadnienia te wymagały rozwoju nowych technik obliczeniowych, skoncentrowanych na wydajnym rozwiązywaniu problemów macierzowych. W większości przypadków są to metody iteracyjne. Generalnie metody te można podzielić za [4, 32] na stacjonarne, bazujące na metodzie Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz niestacjonarne, wywodzące się z technik podprzestrzeni Kryłowa czy też sformułowania Jacobiego-Davidsona. Pierwsza grupa algorytmów jest prosta w implementacji, jednak ich słaba wydajność w zagadnieniach elektrodynamiki obliczeniowej sprawia, że praktycznie nie są stosowane. Metody niestacjonarne, coraz popularniejsze w zastosowaniach inżynier-

skich, są natomiast mocno związane z koncepcją rzutowania Rayleigha-Ritza. Stąd, dalsza część rozdziału poświęcona jest dyskusji projekcji właśnie w przestrzeni \mathcal{R}^n .

2.4.1 Rzutowanie operatorów w przestrzeni \mathcal{R}^n

Niech dana N -wymiarowa przestrzeń euklidesowa będzie wyposażona w standardowy iloczyn skalarny

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \equiv \sum_{n=1}^N v_n w_n \quad (2.44)$$

Operację (2.44) można równoważnie zapisać w notacji wektorowej jako

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w} \quad (2.45)$$

Rzutowanie operatora macierzowego \mathbf{A} (2.9), prowadzące do zdefiniowania macierzy ${}^d\mathbf{L}$, można w przestrzeni euklidesowej opisać zależnością

$${}^dL_{n,m} = \mathbf{w}^{nT} \mathbf{A} \mathbf{v}^m \quad (2.46)$$

Cała przestrzeń bazowa, rozpięta na wektorach \mathbf{v}^m może być zapisana w postaci macierzy, której kolejnymi kolumnami są wektory \mathbf{v}^m ,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^2 | \dots | \mathbf{v}^M] \quad (2.47)$$

Odpowiednio, macierz definiująca przestrzeń testującą ma postać:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}^1 | \mathbf{w}^2 | \dots | \mathbf{w}^M] \quad (2.48)$$

Bezpośredni rachunek pokazuje, że rzutowanie Rayleigha-Ritza operatora \mathbf{A} , (2.46) można wyrazić zwięźle jako

$${}^d\mathbf{L} = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (2.49)$$

Formalnie (2.49) nie różni się od (2.9), jednak obszary zastosowań rzutowania w obu przestrzeniach są całkowicie odmienne.

2.4.2 Algorytmy wykorzystujące rzutowanie w \mathcal{R}^n

Do znanych algorytmów wykorzystujących rzutowanie (2.49) można zaliczyć niestacjonarne metody rozwiązywania układów równań, w szczególności GMRES i MINRES [8, 94], problemów własnych (metody Arnoldiego/Lanchosa i Jacobiego-Davidsona) [4]. Rzutowanie w \mathcal{R}^n wykorzystuje się również w algorytmach redukcji rzędu modelu [52, 62].

Iteracyjne metody rozwiązywania równań i zagadnień własnych

Istotą niestacjonarnych, iteracyjnych algorytmów jest rozwiązanie zredukowanego problemu opisanego macierzą ${}^d\mathbf{L}$,

$${}^d\mathbf{L} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (2.50)$$

w miejsce \mathbf{A} . Przeważnie w każdej iteracji przestrzeń \mathcal{V} , rozpięta na kolumnach macierzy \mathbf{V} , powiększana jest o jeden wektor bazowy aż do uzyskania zbieżności, czyli założonej wartości normy wektora residualnego (2.6). Techniki iteracyjne różnią się między sobą głównie sposobem doboru przestrzeni \mathcal{V} .

Najpowszechniejszymi metodami wykorzystującymi rzutowanie operatorów macierzowych w \mathcal{R}^n są iteracyjne algorytmy rozwiązywania układów równań, takie jak GMRES, MINRES i pokrewne metody szukania wartości własnych [4, 8, 32, 94]. Wspólną ich cechą jest rozwiązywanie problemu w podprzestrzeni Kryłowa zdefiniowanej jako

$$\mathbf{K} = [\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \dots] \quad (2.51)$$

gdzie \mathbf{b} jest arbitralnie ustalonym wektorem startowym, lub pobudzeniem, w przypadku rozwiązywania układów równań. Rzutowanie Galerkin operatora \mathbf{A} na podprzestrzeń (2.51) prowadzi do tworzenia ${}^d\mathbf{L}$ w postaci macierzy Hessenberga, czyli (prawie) trójkątnej górnej. Co więcej, gdy \mathbf{A} jest symetryczna, wynikowa macierz ${}^d\mathbf{L}$ jest trójdiagonalna. W obu przypadkach rozwiązanie tak zredukowanego problemu jest bardzo proste i niewymagające numerycznie. Cały ciężar obliczeniowy w metodach Kryłowa związany jest z koniecznością ortogonalizacji bazy utworzonej w sposób (2.51). Z uwagi na fakt, że kolejne wektory bazy Kryłowa zbiegają się dość szybko do wektora własnego skojarzonego z największą wartością własną operatora, ortogonalizacja taka jest kosztowna i podatna na błędy.

Algorytm Jacobiego-Davidsona

Wśród iteracyjnych metod rozwiązywania problemów własnych warto zwrócić uwagę na algorytm Jacobiego-Davidsona [4]. Jest on bardzo wydajny w przypadku szukania wartości własnych ze środka widma macierzy, czyli w sytuacji typowo spotykanej w elektrodynamice obliczeniowej. Zerowe wartości własne, występujące w wielu sformułowaniach elektromagnetycznych radykalnie pogarszają bowiem wydajność metod przestrzeni Kryłowa, natomiast ich wpływ na algorytm Jacobiego Davidsona jest znacznie mniejszy. Z tego powodu algorytm ten zostanie omówiony poniżej.

W technice Jacobiego-Davidsona przestrzeń rzutową \mathbf{V} uzyskuje się w następujący sposób. Niech będzie zdefiniowana macierz ${}^{M-1}\mathbf{V}$ o $M - 1$ kolumnach. Przybliżone wartości własne \mathbf{A} można znaleźć rozwiązując problem własny opisany macierzą (2.50). Uzyskana wartość własna λ_0 (najbliższa poszukiwanej) pozwala zdefiniować następujący układ równań

$$(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I})\tilde{\mathbf{f}} = 0 \quad (2.52)$$

W przypadku gdy λ_0 rzeczywiście jest wartością własną, rozwiązaniem (2.52) jest wektor własny odpowiadający tej wartości. Wartość λ_0 jest jednak obciążona błędem. Z tego powodu (2.52) rozwiązuje się w sposób przybliżony, z niewielką dokładnością, a uzyskany w wyniku wektor $\tilde{\mathbf{f}}$ powiększa przestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy ${}^{M-1}\mathbf{V}$

$${}^M\mathbf{V} = [{}^{M-1}\mathbf{V} \mid \tilde{\mathbf{f}}] \quad (2.53)$$

Procedurę tę powtarza się aż do uzyskania zbieżności. Aby uniknąć rozrastania się problemu (2.50) wraz ze wzrostem liczby iteracji, usuwa się wybrane wektory bazowe, aby rozmiar przestrzeni rzutowej nie przekroczył pewnego, założonego z góry rozmiaru. Sformułowanie Jacobiego-Davidsona omówione powyżej nie wymaga faktoryzacji macierzy w przypadku obliczania wartości własnych z dolnej części widma, co pozwala na analizę bardzo dużych problemów przy niewygórowanych wymaganiach pamięciowych.

Rozdział 3

Dyskretna projekcja operatorów różnicowych

W poprzednich rozdziałach zaprezentowano dwie koncepcje dyskretyzacji problemów elektrodynamicznych. W rozdziale 1 przedstawiono genezę i podstawowe sformułowania Metody Różnic Skończonych, bazującej na przybliżeniu pochodnej ilorazem różnicowym. W kolejnym rozdziale 2 w skrócie opisano metody projekcji operatorów ciągłych i dyskretnych, bazujące na rzutowaniu Rayleigha-Ritza. Zarówno Metoda Momentów, niektóre algorytmy siatkowe, a także iteracyjne algorytmy rozwiązywania układów równań i problemów własnych można wyrazić w formalizmie przedstawionym w poprzednim rozdziale.

Przedstawienie Metody Różnic Skończonych jak i Metody Momentów miało na celu przygotowanie do omówienia metod dyskretnej projekcji, będącej treścią niniejszej pracy. W poniższym rozdziale zostaną przedstawione oryginalne propozycje oraz przedyskutowane ich zalety i ograniczenia. Techniki wywodzące się z projekcji w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta \mathcal{R}^n można wzbogacić w oparciu o idee wprowadzone w metodzie momentów. Jak pokazano w rozdziale 2, dotychczas stosowane algorytmy projekcji w \mathcal{R}^n wykorzystują podprzestrzenie wygenerowane w sposób automatyczny (Metody podprzestrzeni Kryłowa, Jacobiego-Davidsona, ENOR), tymczasem stosunkowo łatwo można je konstruować wykorzystując znane lub przewidywane własności rozwiązania. Jest to filozofia znacznie bliższa klasycznej metodzie momentów niż znanym algorytmom projekcji dyskretnej.

3.1 Relacja rzutowania w przestrzeni ciągłej i dyskretnej

Wstępem do omówienia metod proponowanych w niniejszej rozprawie będzie dyskusja numerycznego obliczania elementów macierzy Rayleigha-Ritza (2.9) w przestrzeni nieskończenie wymiarowej \mathcal{L}_2 . Jest to przypadek o tyle istotny, że pozwala uwypuklić relację między rzutowaniem w \mathcal{R}^n i \mathcal{L}_2 .

Obliczenie współczynników macierzy Rayleigha-Ritza (2.9) w większości przypadków wymaga zastosowania metod przybliżonych, w szczególności całkowania numerycznego. Z punktu widzenia niniejszego rozdziału istotne jest odróżnienie projekcji operatora całkowego od różniczkowego (bądź sprowadzalnego do różniczkowego). Pierwszy przypadek dotyczy przeważnie problemów otwartej przestrzeni, gdzie dyskretyzuje się funkcję Greena, drugi

natomiast związany jest z definiowaniem metod siatkowych, interesujących z punktu widzenia dyskretnej projekcji. Zostanie rozważona projekcja operatora różniczkowego pierwszej pochodnej \mathcal{D} , kluczowego w definiowaniu metod siatkowych rozważanych w podrozdziale 2.2. Do wyznaczenia macierzy (2.9) dla metody siatkowej wymagane jest obliczenie następującego wyrażenia (2.30):

$${}^c L_{n,m} = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{w}^n(x) \frac{d}{dx} \mathbf{v}^m(x) dx \quad (3.1)$$

Przybliżoną wartości całki (3.1) można wyznaczyć kilkoma sposobami, w tym metodą Simpsona czy metodą trapezów [13]. Metodę trapezów można uprościć, zakładając przybliżenie całkowanej funkcji odcinkami o stałej wartości, czyli używając prostokątów zamiast trapezów. Zakładając zatem, że w niewielkich przedziałach o długości Δx funkcja $\mathbf{f}(x)$ jest stała, można zapisać

$$\int_{x_a}^{x_a+\Delta x} \mathbf{f}(x) dx \approx \mathbf{f}(x_a + \frac{1}{2}\Delta x) \Delta x \quad (3.2)$$

gdzie x_a jest pewnym punktem pomiędzy x_0 a $x_1 - \Delta x$ (3.1). Sumując wartości (3.2) dla całego całkowanego przedziału dostaje się przybliżoną wartość całki

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) dx \quad (3.3)$$

jako sumę

$$I \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{f}(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x) \Delta x \quad (3.4)$$

Z twierdzenia Rolle'a wiadomo, że na odcinku $(x_a, x_a + \Delta x)$ istnieje pewien punkt ξ , w którym funkcja przyjmuje wartość równą wartości średniej we wspomnianym przedziale. Tę własność wykorzystuje się definiując całkę Riemanna jako granicę ciągu

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) dx \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{f}(x_0 + n\Delta_N) \Delta_N \quad \Delta_N = \frac{x_1 - x_0}{N} \quad (3.5)$$

dla coraz gęstszych podziałów Δ_N . Twierdzenie Rolle'a gwarantuje zbieżność (3.5) przy odpowiednich wymaganiach odnośnie ciągłości $\mathbf{f}(x)$ [64]. Dla przedziałów o długości Δx zmierzających do zera przybliżenie (3.4) zbiega się do poszukiwanej wartości całki. Wynika stąd, że zależność (3.4) będzie zatem dawała coraz dokładniejszy wynik, w miarę zmniejszania kroku dyskretyzacji przestrzennej Δx .

Wzór (3.4) można zastosować do obliczenia całki z iloczynu dwóch funkcji $\mathbf{f}(x)$ oraz $\mathbf{g}(x)$, czyli do numerycznego przybliżenia iloczynu skalarnego w \mathcal{L}_2 (2.11). Zachowując próbkowanie funkcji (3.2), można zapisać

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) \mathbf{g}(x) dx \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{f}(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x) \mathbf{g}(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x) \Delta x \quad (3.6)$$

Jeżeli wektory \mathbf{f} i \mathbf{g} w N wymiarowej przestrzeni euklidesowej są zdefiniowane tak, że zawierają próbki funkcji $\mathbf{f}(x)$ i $\mathbf{g}(x)$ w punktach $x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x$

$$f_n = \mathbf{f}(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x) \quad (3.7)$$

$$g_n = \mathbf{g}(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x + n\Delta x) \quad (3.8)$$

prawa strona (3.6) jest równoważna, z dokładnością do stałej multiplikatywnej Δx , iloczynowi skalarnemu wektorów \mathbf{f} i \mathbf{g} w \mathcal{R}^n . Traktując (3.7) jako odwzorowanie (homomorfizm) z \mathcal{L}_2 w \mathcal{R}^n okazuje się, że iloczyny skalarne w tych przestrzeniach mogą być asymptotycznie równoważne, tj. dążyć do tej samej wartości w miarę zmniejszania kroku dyskretyzacji Δx .

Powyższe spostrzeżenia zostaną teraz wykorzystane do budowy algorytmu siatkowego, bazującego na projekcji operatora pierwszej pochodnej, jak to opisano w rozdziale 2.2. Niech $\mathbf{w}(x)$ i $\mathbf{v}(x)$ są odpowiednio funkcjami testującymi i bazowymi definiującymi metodę siatkową, zgodnie z regułami przedstawionymi w podrozdziale 2.3. Poszukiwane są współczynniki a_n , zdefiniowane następująco

$$a_n = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{w}(x) \frac{d}{dx} \mathbf{v}(x - n - d) dx \quad (3.9)$$

Wartość wyrażenia (3.9) można wyznaczyć numerycznie korzystając z dyskretnego operatora pierwszej pochodnej \mathbf{D} (1.23). Zależność (3.9) można zatem przepisać w postaci macierzowej jako

$$a_n \approx \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{v}^n \quad (3.10)$$

gdzie

$$w_m = \mathbf{w}\left(\frac{1}{2}\Delta x + m\Delta x + x_0\right) \quad (3.11a)$$

$$v_m^n = \mathbf{v}(m\Delta x - n - d + x_0) \quad (3.11b)$$

Wektory bazowe \mathbf{v} zawierają próbki \mathbf{v} w punktach odpowiadających węzłom siatki głównej, natomiast wektor testujący \mathbf{w} zawiera wartości funkcji w węzłach siatki dualnej. Dzięki temu, zarówno elementy \mathbf{w} jak i $\mathbf{D} \mathbf{v}^n$ zdefiniowane są w tych samych punktach przestrzeni, co pozwala zastosować zależność (3.6).

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że projekcja ciągła operatora pierwszej pochodnej może być przybliżana dyskretną projekcją (3.10) operatora pierwszej pochodnej w przestrzeni \mathcal{R}^n . Jest to ten sam operator, który jest używany w metodzie różnic skończonych. Jest to bardzo ważne spostrzeżenie, gdyż algorytmy siatkowe takie jak FDTD czy MRTD, definiuje się właśnie w oparciu o projekcję operatora pierwszej pochodnej.

3.1.1 Całkowanie numeryczne w formalizmie macierzowym

Opisane powyżej sformułowanie można uogólnić na dowolne bazy i operatory różniczkowe. W szczególności, wyznaczanie macierzy Rayleigha-Ritza (2.9) metodą momentów dla operatora rotacji może być dokonane za pomocą dyskretnej projekcji macierzy \mathbf{D} (1.23), zdefiniowanej dla Metody Różnic Skończonych. Niech wektory bazowe \mathbf{v}^n zawierają próbki funkcji bazowych v^n określone w węzłach siatki różnicowej. Podobnie, niech wektory testujące \mathbf{w}^n stanowią dyskretną wersję funkcji w^n (2.29). Projekcję operatora dyskretnego \mathbf{D}

$${}^c L_{n,m} = \mathbf{w}^{nT} \mathbf{D} \mathbf{v}^m \quad (3.12)$$

można wyrazić w spójnej notacji macierzowej. Definiując macierze projekcyjne \mathbf{V} i \mathbf{W} jako

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}^1 \mid \mathbf{v}^2 \mid \dots \mid \mathbf{v}^M \right] \quad (3.13)$$

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{w}^1 \mid \mathbf{w}^2 \mid \dots \mid \mathbf{w}^M \right] \quad (3.14)$$

można przepisać (3.12) w zwartej postaci

$${}^c\mathbf{L} = \mathbf{W}^T \mathbf{D} \mathbf{V}. \quad (3.15)$$

Równanie (3.15) jest identyczne z (2.49). Oznacza to, że projekcję dyskretną operatora różnicowego można jednocześnie traktować jak całkowanie numeryczne, opisane w podrozdziale (3.1) i bardziej abstrakcyjnie, jako projekcję macierzy w przestrzeni Hilberta (roz. 2.4). Równanie (3.12) można zatem jednocześnie traktować jako szczególny przypadek, czy wręcz aproksymację numeryczną Metody Momentów jak i abstrakcyjną projekcję operatora na podprzestrzeń rozpiętą na wektorach stanowiących kolumny macierzy \mathbf{V} . Taką szczególną własność, o czym należy pamiętać, mają jedynie operatory zbudowane na bazie schematu różnic skończonych.

Przykład 3.1 Poniżej zostanie zaprezentowany elementarny przykład, który dobrze ilustruje relację między projekcją Rayleigha-Ritza a całkowaniem numerycznym. Niech dany będzie operator drugiej pochodnej $\mathcal{A} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$. Rozważona zostanie projekcja Galerkina \mathcal{A} na przestrzeń rozpiętą na funkcjach harmonicznym $v^n = \sin(nx)$. Dla uproszczenia, problem zostanie zdefiniowany na przedziale $x \in (0, \pi)$ z zerowymi warunkami brzegowymi. Odpowiada to zagadnieniu drgania struny umocowanej na końcach (dla małych wychyleń), ale także zagadnieniu własnemu dla rodzajów $TE_{m,0}$ w falowodzie prostokątnym. Poszukiwane wartości własne problemu ze wspomnianymi warunkami brzegowymi są znane analitycznie i są równe odpowiednio $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ itd. Projekcja (2.9) operatora \mathcal{A}

$${}^cL_{n,m} = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{d^2}{dx^2} \sin(mx) dx \quad (3.16)$$

daje macierz diagonalną, co wynika z faktu, że funkcje harmoniczne są funkcjami własnymi operatora drugiej pochodnej i jednocześnie są ortogonalne. Elementy macierzy ${}^c\mathbf{L}$ równe są odpowiednio

$${}^cL_{n,m} = \begin{cases} n^2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (3.17)$$

Elementy na diagonalu odpowiadają kolejnym wartościom własnym operatora $\frac{d^2}{dx^2}$. Aby zapisać (3.16) w przestrzeni dyskretnej, trzeba zdefiniować operator macierzowy \mathbf{A} , będący odpowiednikiem \mathcal{A} . Można go zapisać wykorzystując schemat różnicowy dla drugiej pochodnej (1.8), jako

$$A_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2} & |m - n| = 1 \\ \frac{-2}{\Delta x^2} & m = n \\ 0 & |m - n| > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Dla dziedziny podzielonej na $N + 2$ węzły (włączając w to węzły brzegowe o wymuszonej wartości równej zero), krok siatki Δx równy jest $\frac{\pi}{N+1}$. Wektory bazowe do projekcji

dyskretnej mają postać

$$\mathbf{v}^m = \begin{bmatrix} \sin(m\Delta x) \\ \sin(2m\Delta x) \\ \sin(3m\Delta x) \\ \vdots \\ \sin(m(N-1)\Delta x) \\ \sin(mN\Delta x) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

i pozwolą zdefiniować macierz projekcyjną \mathbf{V} analogicznie do (3.13). Projekcja

$${}^d\mathbf{L} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (3.20)$$

macierzy (3.18) ma bardzo ciekawe własności [32, 65]. Okazuje się bowiem, że wektory \mathbf{v}^m (3.19), będące próbkami funkcji harmoniczných, są wektorami własnymi operatora \mathbf{A} . Wyraźnie widoczna jest tu analogia między ciągłą i dyskretną projekcją, zarówno w kontekście przybliżenia (3.4) jak z relacji (3.19) między wektorami własnymi obu sformułowań. Wartości własne, będące jednocześnie elementami diagonalnymi macierzy ${}^d\mathbf{L}$ (3.20), opisuje wzór [65]

$${}^dL_{n,n} = \frac{2}{\Delta x^2} \left(1 - \cos \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \right) \quad n = 1..N \quad (3.21)$$

Zależność między (3.21) a (3.17) może zostać wykorzystana do szacowania dyspersji schematów różnicowych, co bezpośrednio zastosowano w [45]. Funkcje harmoniczne szczególnie często pojawiają się w rozwiązaniach problemów elektrodynamicznych, dlatego przedstawiony powyżej przypadek ma duże znaczenie praktyczne, w szczególności w kontekście technik PEE [68, 69] szeroko dyskutowanych w niniejszej pracy.

Przykład 3.2 Niech ten sam problem, opisany operatorem drugiej pochodnej \mathcal{A} , z warunkami brzegowymi zdefiniowanymi jak w poprzednim przykładzie, będzie rozwiązany w podprzestrzeni rozpiętej na wielomianach $\mathbf{p}^m(x)$ postaci,

$$\mathbf{p}^m(x) \equiv \left(\frac{2x - \pi}{\pi} \right)^m \quad (3.22)$$

Aby funkcji (3.22) można było użyć do budowy przestrzeni projekcyjnej, należy je zmodyfikować tak, aby spełniały założone (zerowe) warunki brzegowe. Można to osiągnąć, np. tworząc funkcje bazowe jako:

$$\mathbf{v}^m(x) = \begin{cases} \mathbf{p}^m(x) - 1 & \text{m parzyste} \\ \mathbf{p}^m(x) - \mathbf{p}^{m+2}(x) & \text{m nieparzyste} \end{cases} \quad (3.23)$$

Odpowiednio, dla projekcji dyskretnej operatorem wyjściowym jest macierz \mathbf{A} (3.18), reprezentująca drugą pochodną. Wektory bazowe \mathbf{v}^m zdefiniowano jako próbki (3.23) w węzłach siatki, czyli

$$v_n^m = \mathbf{v}^m(n\Delta x) \quad (3.24)$$

Macierz projekcyjną \mathbf{V} zbudowano analogicznie do (3.13). Rozwiązano problem własny stosując 10 wektorów bazowych, zarówno w przestrzeni ciągłej, jak i dyskretnej. Otrzymane wartości własne obliczono dla różnych gęstości siatki różnicowej N , określonych przez liczby

węzłów dla których została zdefiniowana macierz \mathbf{A} . Zgodnie z (3.4), wraz ze wzrostem N powinna rosnąć także dokładność aproksymacji macierzy ${}^c\mathbf{L}$ otrzymanej przez projekcję w przestrzeni ciągłej, a co za tym idzie, wartości własne problemu dyskretnego i ciągłego powinny się zbliżać. W tabeli 3.1 porównano błędy w określeniu kolejnych wartości własnych, a dokładniej pierwiastków z wartości własnych macierzy (3.18) rzutowanej na podprzestrzeń rozpiętą na wektorach (3.24). Porównano pierwiastki z kolejnych wartości własnych, gdyż w typowych zagadnieniach mają one przejrzystą interpretację fizyczną, np. częstotliwości rezonansowych. Wykonano test dla rzutowania w przestrzeni ciągłej oraz dyskretnej, dla różnej liczby węzłów N , dla których operator (3.18) był zdefiniowany. Wielkość N , choć nie pojawia się jawnie w problemie po rzutowaniu ma jednak wpływ na dokładność rozwiązania. W dalszej części pracy pierwotna siatka różnicowa operatora modyfikowanego metodą projekcji będzie nazywana siatką tła. Zgodnie z wcześniejszymi rozwiązaniami, zdefiniowanie gęstej siatki tła poprawia dokładność.

TABELA 3.1: Błędy w określeniu pierwiastków z wartości własnych otrzymanych w wyniku rzutowania problemu własnego (3.25) na podprzestrzeń rozpiętą na wielomianach (3.23). Wyniki, odniesione do rozwiązania analitycznego, przedstawiono dla różnych gęstości siatki różnicowej tła N , a także dla projekcji ciągłej (PC).

		PC	N=20	N=50	N=100	N=200	N=500		
Wartość λ	1	-1e-8	-0.11	-0.02	-4.2e-2	-1e-3	-2e-4	błąd [%]	
	2	-1e-8	-0.46	-0.07	-0.02	-4.2e-3	-7e-4		
	3	2.2e-7	-1.02	-0.15	-0.04	-9.3e-3	-1.5e-3		
	4	2.2e-4	-1.81	-0.27	-0.07	-0.02	-2.5e-3		
	5	0.15	-2.81	-0.38	-0.05	0.03	0.06		
	6	0.57	-4.01	-0.46	0.03	0.15	0.18		
	7	16	-3.78	3.39	4.49	4.76	4.84		
	8	29	-5.16	5.04	6.70	7.12	7.24		
	9	235	5.26	41.02	49.24	51.47	52.11		

Wektory bazowe \mathbf{v}^m użyte w omawianym przykładzie (3.24) nie są do siebie ortogonalne, zarówno w przestrzeni ciągłej jak i dyskretnej. Oznacza to konieczność rozwiązania uogólnionego problemu własnego. W przestrzeni \mathcal{R}^n wygląda on następująco:

$${}^d\mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{V}^T\mathbf{V}\lambda\hat{\mathbf{u}}. \quad (3.25)$$

Macierz $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ z prawej strony (3.25) odpowiada macierzy metrycznej (2.26). Zarówno z punktu widzenia wydajności jak i możliwości zastosowania rzutowania dyskretnego algorytmach czasowych, wskazana jest likwidacja macierzy z prawej strony (3.25). Postulat ten można spełnić konstruując ortogonalną macierz projekcyjną \mathbf{V} . Niech baza wielomianowa \mathbf{v}^m (3.23), zostanie zmodyfikowana tak, aby wykorzystać ortogonalne wielomiany w miejsce zdefiniowanych w (3.23). Macierz z prawej strony (3.25) jest wtedy jednostkowa, przynajmniej w przestrzeni ciągłej. Należy bowiem zauważyć, że jakkolwiek iloczyn skalarny w \mathcal{R}^n (2.44) przybliży iloczyn skalarny w \mathcal{L}_2 (2.11), jednak dla skończonych kroków siatki nie są one równe. W szczególności zatem, wektory ortogonalne w przestrzeni ciągłej \mathcal{L}_2 , po dyskretyzacji (3.24) mogą nie być ortogonalne w \mathcal{R}^n . Aby zobrazować problem, powtórn

rozwiązano poprzednie zagadnienie, używając ortogonalnych funkcji $q^m(x)$, wygenerowanych ortogonalizując $p^m(x)$ (3.22) metodą Gramma-Schmidta. Otrzymane w ten sposób wielomiany $q^m(x)$ można zapisać jako:

$$\begin{aligned} q^1(x) &= \frac{1}{4} (x - x^3) \sqrt{105} \\ q^2(x) &= \frac{1}{2} x^2 \sqrt{10} \\ q^3(x) &= \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3} x^3 - x^5 - \frac{1}{3} x \right) \sqrt{1155} \\ q^4(x) &= \frac{21}{4} \left(x^4 - \frac{5}{7} x^2 \right) \sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

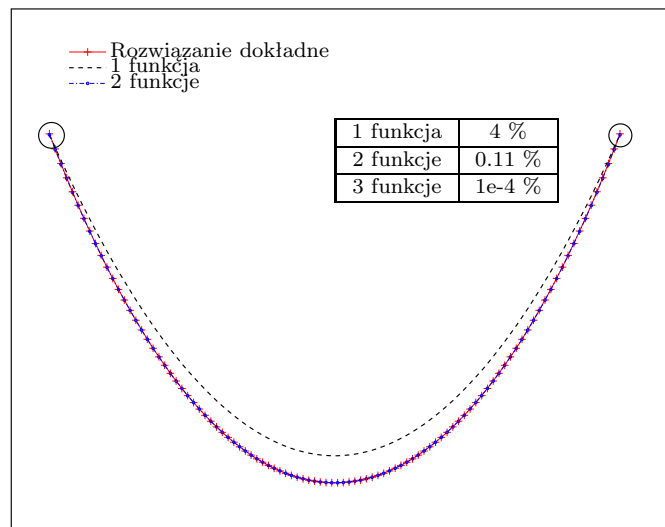
Mają one dość złożoną postać, przytoczono zatem tylko kilka funkcji niższego rzędu. Projekcja ciągła problemu (3.16) z użyciem funkcji $v^m(x)=q^m(x)$ prowadzi oczywiście do identycznych wyników, jak przedstawiono w tabeli 3.1. W przypadku projekcji dyskretnej, ortogonalność odpowiadających (3.26) wektorów q^m jest zaburzona, czyli nadal powinien być rozpatrywany uogólniony problem własny. W praktyce pozadiagonalne elementy macierzy $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$ dla większych rozdzielczości siatki tła są na tyle małe, że można je pominąć. Ich wpływ można ocenić porównując wyniki w tabelach 3.1 i 3.2. W tabeli 3.2 przedstawiono wyniki uzyskane dla projekcji z użyciem macierzy projekcyjnej, zawierającej próbki funkcji q^m (3.26). Rozwiązano zagadnienie własne, zakładając jednostkową macierz metryczną. Dla oceny błędu jaki wprowadza założenie o ortogonalności \mathbf{V} , w tabeli 3.2 podano największą pozadiagonalną wartość macierzy $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$. Jak widać, dla rozmiaru siatki tła powyżej $N = 50$ zastosowane uproszczenie praktycznie nie wpływa na dokładność. Problem utraty ortogonalności po próbkowaniu zaczyna być istotny, dla małych gęstości siatki, rzędu kilku czy kilkunastu oczek, a jak zostanie pokazane później takie właśnie przypadki przeważnie występują w problemach elektrodynamicznych omawianych w dalszej części pracy.

TABELA 3.2: Porównanie błędów w określeniu wartości własnych w przypadku wykorzystania ortogonalnej i nieortogonalnej bazy projekcyjnej w postaci próbek wielomianów. Wyniki otrzymane przez rozwiązanie nieuogólnionego problemu własnego rozwiązanego w przestrzeni rozpiętej na wielomianach $q(x)$ porównano z rezultatami z poprzedniego przykładu 3.2. Zaznaczono błąd w określeniu pierwiastka z wartości własnej oraz różnicę błędów między omawianym rozwiązaniem a przykładem 3.2. Dodatkowo, zaznaczono również wartość największego pozadiagonalnego elementu macierzy $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$.

	N=20		N=50		N=100		N=200	
$\max\{\mathbf{V}^T \mathbf{V} - \text{diag}(\mathbf{V}^T \mathbf{V})\}$	0.333		1.14e-4		7.42e-4		4.56e-5	
λ_{odn}	err. [%]	Δ err.	err. [%]	Δ err.	err. [%]	Δ err.	err. [%]	Δ err.
1	-0.114	2.36e-05	-0.0171	9.99e-09	-0.0042	5.07e-09	-0.00104	5.06e-09
2	-0.456	0.00113	-0.0685	1.35e-07	-0.0168	-1.88e-08	-0.00415	-1.94e-08
3	-1.02	0.00201	-0.154	-3.39e-06	-0.0378	-1.28e-07	-0.00934	8.01e-08
4	-1.84	0.0228	-0.274	-3.64e-05	-0.067	-2.23e-06	-0.0165	-2.35e-07
5	-2.93	0.128	-0.377	0.00116	-0.0461	6.49e-05	0.0347	3.98e-06
6	-5.32	1.31	-0.464	0.00394	0.0299	0.000213	0.15	1.5e-05
7	-7.42	3.65	3.4	-0.00859	4.49	-0.000492	4.76	-3.39e-05

3.1.2 Budowa bazy w oparciu o znane własności rozwiązania

Bazy projekcyjne dla zagadnień zdyskretyzowanych metodą różnic skończonych można budować między innymi w oparciu o znane własności rozwiązania, w szczególności rozkłady pól elektromagnetycznych. Poniżej naszkicowana zostanie ogólna koncepcja tworzenia tego typu przestrzeni, która jest charakterystycznym elementem proponowanych sformułowań. Najprościej idee wykorzystania własności rozwiązania do tworzenia baz projekcyjnych można zaprezentować, rozważając problem swobodnie zwisającej liny, zawieszanej jak pokazano na rys. 3.1. Można spodziewać się, że rozwiązanie da się znaleźć w przestrzeni rozpiętej na funkcjach $f(x) = x^{2n}$. W istocie, dokładne rozwiązanie, opisane funkcją $\cosh(x)$, można przybliżyć wspomnianymi funkcjami potęgowymi np. rozkładając $\cosh(x)$ w szereg McLaurina. Widać wtedy, że stosunkowo krótkie rozwinięcie pozwala przybliżyć rozwiązanie z dużą dokładnością. Niestety, w problemach elektromagnetycznych rzadko zdarzają się przypadki tak oczywiste jak wspomniane zagadnienie. Metoda siatkowa jaką jest Metoda Różnic Skończonych ma jednak wiele cech, które ułatwiają konstrukcję bazy przy bardzo ogólnych przesłankach.

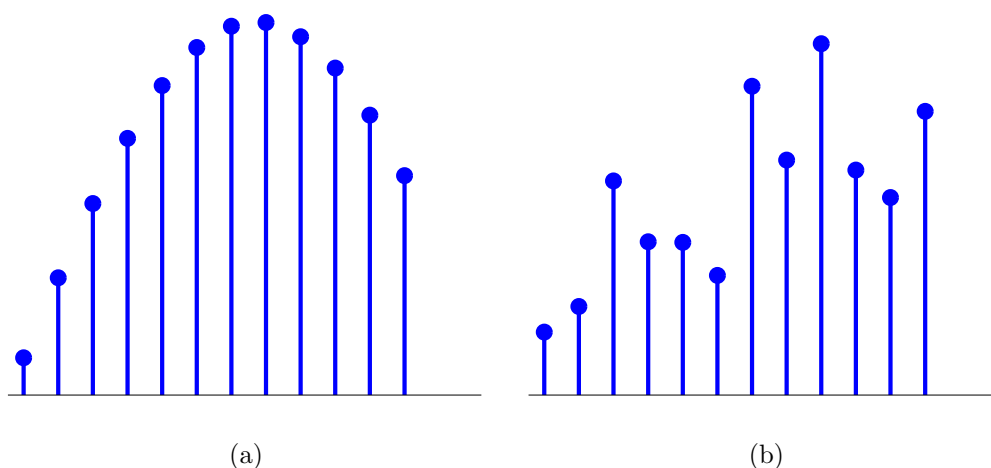


RYSUNEK 3.1: Kształt swobodnie zwisającej liny zestawiony z wykresami funkcji potęgowych parzystego rzędu $f(x) = x^{2n}$. Widoczne podobieństwo kształtów znajduje odzwierciedlenie w liczbach. W tabeli naniesionej na rysunku zaznaczono błąd w określeniu energii potencjalnej liny. Rozwiązanie o dokładności lepszej niż 1% uzyskuje się już dla 2 funkcji bazowych.

Pierwszą, ważną z punktu widzenia projekcji, cechą Metody Różnic Skończonych jest silne nadpróbkiowanie pola. Zakłada się, że minimalna rozdzielczość siatki musi wynosić 10 węzłów na najmniejszą długość fali, jaką wzbudza się w układzie. W przypadku struktury zawierającej dielektryki o znacznie różniących się przenikalnościach względnych lub o skomplikowanej geometrii, może w niektórych obszarach wystąpić siatka o rozdzielczości ponad 100 węzłów na długość fali. Znajac własności pól elektromagnetycznych można założyć, że w rejonach regularnych sąsiednie próbki pola mają zbliżone wartości. Czyli sytuacja przedstawiona schematycznie na rys. 3.2(a) występuje zdecydowanie częściej niż z przedstawiona

na rysunku 3.2(b). Stąd celowe wydaje się użycie funkcji uśredniających sąsiednie próbki pola, takie jak falki Haara, czy wielomiany Legendre’a niższego rzędu.

W strukturach o pewnej jednorodności bądź symetrii [19, 68], rozkład pola w pewnych fragmentach dziedziny obliczeniowej może być znany a priori. Przykładowo, metody rozwijania w funkcje własne PEE [69] wykorzystują fakt, że dla jednorodnych w wybranym kierunku struktur falowodowych pole ma zmienność harmoniczną. Podobna sytuacja występuje w osiowo symetrycznych strukturach cylindrycznych. Formalnie, technika ta polega na rzutowaniu operatora rotacji w przestrzeni ciągłej na funkcje harmoniczne w celu uzyskania problemu o mniejszym wymiarze. Jak sugeruje przykład 3.1, z powodzeniem można jednak odtworzyć całą procedurę wyłącznie w przestrzeni dyskretniej, wychodząc z macierzowego operatora rotacji (1.33). Sformułowanie takie pozwala ominąć problemy związane z łączeniem dziedzin PEE z dziedziną różnic skończonych. Omawiane w pracy sformułowanie projekcyjne pozwala na to w sposób elastyczny i łatwo algorytmizowalny.



RYSUNEK 3.2: Nadpróbkowanie przestrzenne występujące w metodzie różnic skończonych powoduje, że można spodziewać się iż w jednorodnych obszarach sąsiadujące próbki będą miały podobną wartość. Stąd bardziej prawdopodobny jest rozkład pola elektromagnetycznego w przestrzeni przedstawiony na rys. (a) niż (b). W większości przypadków pola zmieniają się wolniej niż pozwala na to warunek Nyquista dla danej siatki. Fakt ten można wykorzystać do redukcji nadmiarowych zmiennych.

Ostatnia koncepcja budowy wektorów bazowych polega na wykorzystaniu numerycznych rozwiązań uzyskanych dla pewnych podobszarów. W szczególności, naśladując rozwinięcie modowe w falowodzie prostokątnym stosowane w metodzie PEE, można rozszerzyć ją na przewodnice niejednorodne lub otwarte. Zamiast funkcji harmonicznych należy użyć wtedy rozwiązań dwuwymiarowego problemu własnego. Rozwinięcie takie, oprócz zmniejszenia rozmiaru problemu, może mieć inne zalety. Zmienne po projekcji bezpośrednio odpowiadają wtedy amplitudom konkretnych modów, co pozwala na prostą ekstrakcję parametrów rozproszenia jak i konstruowanie warunków absorpcyjnych dobranych niezależnie dla każdego modu, podobnie jak w [47].

Od rzutowania z wykorzystaniem numerycznie znalezionych funkcji bazowych już tylko krok do rzutowania wybranych fragmentów dziedziny na funkcje znalezione np. algorytmami redukcji rzędu modelu. Jest to punkt wspólny, gdzie ewolucja metod redukcji rzędu modelu od konstrukcji modelu wejście-wyjście [14, 52] i ewolucja dyskretniej wersji rozwinię-

cia w funkcje własne [113, 114] dają się ująć w jednym sformułowaniu postaci, wywodzącym się z metody Rayleigha-Ritza w przestrzeni \mathcal{R}^n (3.15).

3.2 Projekcja operatorów różnicowych

Ogólne ramy projekcji operatorów dyskretnych i jej związek z rzutowaniem w przestrzeni ciągłej zostały nakreślone odpowiednio w podrozdziałach 2.4 oraz 3.1. Poniżej zostaną rozpatrzone zagadnienia bezpośrednio związane z projekcją zagadnień różnicowych spotykanych w elektrodynamice. Szeroko także omówiona jest koncepcja budowy ortogonalnych przestrzeni projekcyjnych.

3.2.1 Projekcja równania falowego

Najprostszym przypadkiem rzutowania operatora dyskretnego w elektrodynamice jest projekcja równania falowego zdefiniowanego w dziedzinie częstotliwości. Na razie nie będą czynione żadne założenia odnośnie przestrzeni definiowanych za pomocą kolumn macierzy \mathbf{V} i \mathbf{W} , zakłada się tylko, że są one liniowo niezależne. Przykładowe równanie falowe dla pola elektrycznego, z dokładnością do stałej multiplikatywnej, ma postać

$$\mathbf{A}\mathbf{e} - \omega^2\mathbf{e} = 0 \quad (3.27)$$

gdzie \mathbf{A} jest operatorem dyskretnym drugiego rzędu (np. (3.18)). Zdefiniowanie nowej zmiennej $\hat{\mathbf{e}}$ jako

$$\mathbf{e} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{e}}, \quad (3.28)$$

pozwala przepisać (3.27) jako

$$\mathbf{A}\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}} - \omega^2\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}} = 0 \quad (3.29)$$

Jeśli liczba kolumn macierzy \mathbf{V} jest znacznie mniejsza od liczby wierszy, to układ (3.29) jest nadokreślony. Rozwiązanie (3.29) wygląda identycznie jak w przypadku przestrzeni funkcyjnej, dyskutowanej w rozdziale 2. Analogicznie, należy zdefiniować macierz \mathbf{W} , której kolumny rozpinają przestrzeń testującą. Mnożąc obie strony (3.29) przez \mathbf{W}^T otrzymuje się zmodyfikowany problem

$$\mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}} - \omega^2\mathbf{W}^T\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}} = 0 \quad (3.30)$$

Rozwiązanie $\hat{\mathbf{e}}$ zagadnienia (3.30) ma analogiczne własności jak rozwiązanie problemu ciągłego metodą ważonych residuów.

3.2.2 Układ równań pierwszego rzędu

Sformułowanie drugiego rzędu postaci (3.27) rzadko stosuje w elektrodynamice obliczeniowej. W kolejnym kroku zostanie przeanalizowana projekcja dyskretnej postaci układu równań Maxwella, czyli układu dwóch równań rzędu pierwszego. Problem sformułowany w dziedzinie częstotliwości, z użyciem normalizacji (1.37) ma postać:

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -j\omega\mathbf{h} \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{h} = j\omega\mathbf{e} \quad (3.31b)$$

Dla uproszczenia założono zerowe pobudzenie. Zastosowana normalizacja pól pozwala uprościć zapis równań, dzięki zawarciu parametrów materiałowych w operatorze \mathbf{C} . Niech wektory pól \mathbf{e} i \mathbf{h} wyrażone będą jako

$$\mathbf{e} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{e}} \quad (3.32a)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}\hat{\mathbf{h}} \quad (3.32b)$$

Zastosowanie projekcji skośnej (3.30) z użyciem macierzy (3.32) do (3.31) daje w rezultacie

$$\mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}} = -j\omega \mathbf{W}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}} \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}} = j\omega \mathbf{V}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}} \quad (3.33b)$$

W ten sposób uzyskano nowy, zmodyfikowany problem, o mniejszym rozmiarze, ze względu na wektory $\hat{\mathbf{e}}$ i $\hat{\mathbf{h}}$. Rozwiązanie (3.31) jako układu równań jest jednak bardzo nieefektywne i w takiej postaci rzadko jest stosowane. Pozwala jednak zbudować problem drugiego rzędu, analogiczny do (3.27), choć jak się za chwilę okaże równanie falowe wyprowadzone z (3.33) nie jest tożsame z (3.27). Układ równań (3.31) można sprowadzić, cały czas zakładając brak pobudzenia, do dyskretnego równania falowego postaci

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{e} = 0 \quad (3.34)$$

Przekształcając tak samo (3.33), najpierw rozwiązując (3.33b) ze względu na $\hat{\mathbf{e}}$,

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{-j}{\omega} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}} \quad (3.35)$$

i wstawiając (3.35) do (3.33a) otrzymuje się następujący operator drugiego rzędu odpowiadający (3.34):

$$\mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{V} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}} - \omega^2 \mathbf{W}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}} = 0 \quad (3.36)$$

Podobną zależność można wyprowadzić dla wektora $\hat{\mathbf{e}}$, reprezentującego próbki pola elektrycznego,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}} - \omega^2 \mathbf{V}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}} = 0 \quad (3.37)$$

Porównując (3.37) z (3.34) można postawić dwa pytania: po pierwsze, czy obie projekcje nie powinny dawać identycznego rezultatu, a jeśli nie, to jaki jest wpływ czynnika $\mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$ w (3.37) i odpowiednio $\mathbf{V} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T$ w (3.36). Rozważania na ten temat zostaną odłożone do czasu zdefiniowania metod projekcji ortogonalnej, która ma fundamentalne znaczenie w praktycznych sformułowaniach, szczególnie w tworzeniu algorytmów czasowych.

3.3 Problemy definiowane w dziedzinie czasu

Jak dotąd dyskutowano sformułowanie w dziedzinie częstotliwości, które ma nieco prostszą postać niż sformułowanie czasowe. W elektrodynamice obliczeniowej, w szczególności w przypadku różnic skończonych najczęściej definiuje się problem właśnie w dziedzinie czasu, co pozwala na analizę problemów opisanych znacznie większą liczbą zmiennych, niż w przypadku innych metod. Wydajność metody czasowej bierze się z faktu, że do iteracji (1.31) nie

jest konieczne wykonywanie kosztownych operacji, takich jak faktoryzacja czy odwracanie macierzy. Jedyną wykonywaną operacją jest mnożenie macierzy przez wektor. Niech punktem wyjścia do wprowadzenia metod projekcji w dziedzinie czasu będzie niezmodyfikowany algorytm FDTD, zapisany w formie macierzowej (1.34)

$$\mathbf{h}^{k+1} = \mathbf{h}^k - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{e}^k \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{e}^{k+1} = \mathbf{e}^k + \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{h}^{k+1} \quad (3.38b)$$

Celem projekcji jest przededefiniowanie problemu (3.38) dla nowego (mniejszego) zestawu zmiennych $\hat{\mathbf{e}}$ i $\hat{\mathbf{h}}$ (3.32). Podstawienie (3.32) do (3.38) przeprowadza się analogicznie do (3.33), co daje następujący wynik

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}}^{k+1} = \mathbf{W}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}}^k - \Delta t \mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}^k \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}^{k+1} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}^k + \Delta t \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}}^{k+1} \quad (3.39b)$$

Jak widać, wektory reprezentujące próbki czasowe w (3.39) w momentach $k + 1$, w odróżnieniu od (1.31), są uwikłane. Aby uzyskać dogodną do obliczeń postać (3.39) należy równania (3.39) przemnożyć odpowiednio przez $(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}$ i $(\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1}$. Alternatywą dla kosztownego numerycznie odwracania macierzy (lub równoważnych technik np. faktoryzacji LU) jest zbudowanie macierzy projekcyjnych z wektorów ortogonalnych. W takiej sytuacji $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$ oraz $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o odpowiednim rozmiarze. Jak zostanie pokazane dalej, wymóg ten jest możliwy do spełnienia, przez co dyskutowane metody projekcji dotyczą właśnie projekcji z użyciem wektorów ortogonalnych.

3.3.1 Stabilność algorytmu czasowego po projekcji

Kluczowym problemem wszystkich symulacji czasowych jest stabilność. Algorytmy czasowe można podzielić na niestabilne, warunkowo lub bezwarunkowo stabilne oraz takie dla których nie można jednoznacznie stabilności określić. Dyskusję na ten temat najwygodniej jest przeprowadzić analizując problem drugiego rzędu, zbudowany na podstawie (3.39). Założono ortogonalność macierzy projekcyjnych \mathbf{W} i \mathbf{V} . Schemat otwarty drugiego rzędu zbudowany na podstawie (3.39) ma postać

$$\hat{\mathbf{e}}^{k+1} = -(\Delta t)^2 ({}^d \mathbf{A}) \hat{\mathbf{e}}^k + 2\hat{\mathbf{e}}^k - \hat{\mathbf{e}}^{k-1} \quad (3.40)$$

$${}^d \mathbf{A} = \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (3.41)$$

Wspomniane rodzaje stabilności, można scharakteryzować w zależności od własności macierzy \mathbf{A} (3.41) następująco:

- **Problem niestabilny** macierz ${}^d \mathbf{A}$ nieokreślona.
- **Stabilność nieokreślona** macierz ${}^d \mathbf{A}$ określona, ale niesymetryczna.
- **Problem warunkowo stabilny** macierz ${}^d \mathbf{A}$ symetryczna, określona.

Szczegółowe rozważania na ten temat można znaleźć w [72]. Z punktu widzenia niniejszej pracy istotny jest fakt, że dla symetrycznej i określonej macierzy ${}^d \mathbf{A}$ stabilność jest gwarantowana pod warunkiem, że krok czasowy Δt spełnia zależność [103, 121]

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\|{}^d \mathbf{A}\|}} \quad (3.42)$$

Macierz (3.41) ma postać $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$, gdzie $\mathbf{L} = \mathbf{W}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$, czyli z definicji jest symetryczna i co najmniej półokreślona. Rzutowanie (3.39) z użyciem macierzy ortogonalnych daje z definicji problem stabilny pod warunkiem spełnienia (3.42). Co ważne, projekcja taka również nie może zwiększyć normy macierzy, bowiem

$$\|\mathbf{W}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\| \leq \|\mathbf{W}\| \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot \|\mathbf{V}\| \quad (3.43)$$

a normy obu macierzy projekcyjnych są z definicji równe 1.¹

3.4 Tworzenie baz ortogonalnych

Z rozważań przedstawionych w poprzednim podrozdziale, a także w przykładzie 3.2 wynika, że bardzo pożądaną cechą wektorów bazowych jest ortogonalność. Sposób tworzenia baz projekcyjnych z uwzględnieniem tego warunku jest istotnym elementem dyskutowanych w pracy metod projekcji. Niniejszy rozdział prezentuje ogólną koncepcję tworzenia ortogonalnych macierzy projekcyjnych, bez wnikania w szczegóły implementacyjne.

Zgodnie z koncepcją dyskretnej projekcji, wektory bazowe dobiera się tak, by możliwie dobrze przybliżały rozkład pola. W praktyce rzadko zdarza by możliwe było zdefiniowanie bazy ortogonalnej i jednocześnie pasującej do spodziewanego rozkładu pola. Ortogonalizacja jest z kolei procedurą numerycznie kosztowną i wrażliwą na błędy zaokrągleń. Rozwiązaniem jest definiowanie wektorów bazowych tak, by niezerowe wartości przyjmowały one w rozłącznych podobszarach. W kontekście macierzy projekcyjnej oznacza to, że macierz ma strukturę quasidiagonalną. W ten sposób ortogonalność całej macierzy jest gwarantowana poprzez ortogonalność każdego z jej bloków, a te, jako macierze o znacznie mniejszym rozmiarze, mogą być w razie potrzeby zortogonalizowane niewielkim kosztem. Ponadto, w typowych zastosowaniach wspomniane bloki powtarzają się. Odpowiednie definiowanie macierzy projekcyjnych pozwala zminimalizować koszt ortogonalizacji tak, że jej wpływ na złożoność algorytmu jest znikomy.

Niech dane będą dwa zestawy funkcji \mathbf{f}^m i \mathbf{g}^m o następujących własnościach²:

$$\exists m, n, \quad m \neq n \cap (\mathbf{f}^m \cap \mathbf{f}^n \neq \emptyset) \quad (3.44a)$$

$$\forall m, n \quad m \neq n \Rightarrow \mathbf{g}^m \cap \mathbf{g}^n = \emptyset \quad (3.44b)$$

Warunek (3.44b) oznacza, że nie istnieje punkt, w którym dwie funkcje jednocześnie przyjmują wartość różną od zera, natomiast (3.44a) oznacza, że taka para funkcji istnieje. Macierz projekcyjną dla dyskretnej projekcji dla przypadku (3.44a) schematycznie moż-

¹Zakłada się że norma macierzy \mathbf{A} określona jest jako $\max\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| = 1$

²Jako iloczyn logiczny funkcji zakłada się zbiór punktów dla którego jednocześnie przyjmują one niezerowe wartości.

na przedstawić jako

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 & f_1 \\ f_4 & f_2 \\ & f_3 & f_1 \\ & f_4 & f_2 \\ & & f_3 & f_1 \\ & & & f_4 & f_2 \\ & & & & f_3 & f_1 \\ & & & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Z macierzą taką można się spotkać przy definiowaniu takich metod jak MRTD z użyciem falek Daubechies czy FEM z elementami Lagrange'a [27]. Ortogonalizacja macierzy postaci (3.45) jest kosztowna, a jej wynik jest gęsty, co ma zgubny wpływ na wydajność obliczeniową [62]. Odmienna sytuacja występuje w przypadku, gdy funkcje bazowe spełniają warunek (3.44b). Analogiczna do (3.45) macierz projekcyjna zbudowana na podstawie próbek kolejnych funkcji bazowych ma postać

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ & g_1 \\ & g_2 \\ & g_3 \\ & & g_1 \\ & & g_2 \\ & & g_3 \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Ze znanych metod, macierz projekcyjna postaci (3.46) wystąpi np. dla MRTD z użyciem falek Haara. W dalszej części rozdziału wprowadzone zostaną bazy oparte na wielomianach Legendre'a o podobnych własnościach. Na pierwszy rzut oka widać, że ortogonalizacja (3.46) jest bardzo prosta ze względu na jej blokowo - diagonalny charakter. Tego typu macierze mają podstawowe zastosowanie w omawianych metodach projekcji. Definiując dowolne funkcje bazowe z zachowaniem (3.44b) można zapewnić ortogonalność macierzy projekcyjnej przy znikomych nakładach obliczeniowych. Zapis (3.45) i (3.46) ma oczywiście charakter schematyczny. W ogólności, za każdym z elementów f_n czy g_n , może kryć się zarówno skalar, jak i macierz o dowolnych rozmiarach.

3.5 Budowa problemu drugiego rzędu

Po przedstawionych w poprzednim rozdziale rozważaniach dotyczących budowy baz ortogonalnych, czas wrócić do naszkicowanego w podrozdziale 3.2.2 zagadnienia budowy problemu drugiego rzędu po projekcji (3.37), z dodatkowym założeniem ortogonalności

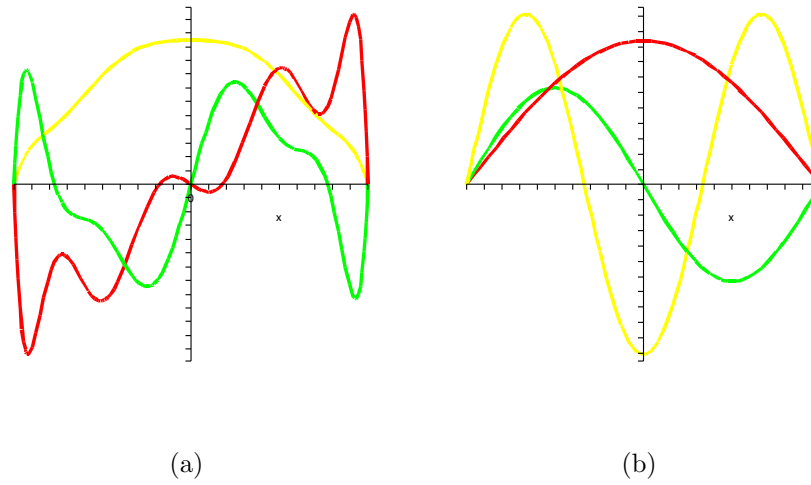
TABELA 3.3: Porównanie błędów w określeniu wartości własnych problemu z przykładu 3.2 z wykorzystaniem rzutowania operatora pierwszego rzędu. Testy przeprowadzono dla różnych rozdzielczości siatki tła, oznaczonej jako N . Wartości uzyskane dla projekcji ciągłej są identyczne jak w tab. 3.1

	N=20	N=50	N=100	N=200	N=500
	err. [%]	err. [%]	err. [%]	err. [%]	err. [%]
błąd [%]	-0.05779	0.007359	0.001857	0.0004617	7.352e-05
	-3.692	0.0742	0.01856	0.004608	0.0007334
	-17.05	0.2964	0.0734	0.01821	0.002902
	-25.36	0.7633	0.1901	0.04728	0.007617
	-18.94	1.477	0.4145	0.149	0.07527
	-26.89	2.56	0.7893	0.3391	0.2138
	-15.55	8.166	5.595	5.032	4.88
	-5.8	11.77	8.244	7.499	7.301
	12.95	30.73	46.75	50.86	52.01
	35.59	29	52.9	59.22	61

Prawidłowy wybór bazy projekcyjnej \mathbf{W} , nawet gdy rozwiązuje się problem drugiego rzędu (3.51) gdzie przestrzeń \mathcal{W} pojawia się niejawnie, jest równie istotny jak bazy \mathbf{V} . Wybór wielomianów Legendre'a jako funkcji testujących jest celowy, gdyż rozpinają one tę samą przestrzeń co pochodne funkcji należących do \mathcal{V} . Ponadto, co jest szczególnie ważne, nie narzucają żadnych warunków brzegowych. Dla przykładu, na rys. 3.3 pokazano kilka pierwszych wektorów własnych (związanych z najmniejszymi wartościami własnymi) problemu rzutowanego z użyciem tej samej macierzy $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Po kształcie rozwiązań widać, że znacznie odbiegają od funkcji harmoniczných, których należałoby w tym miejscu oczekiwać. Zastosowanie wektorów testujących wymuszających zerowe warunki brzegowe do operatora pierwszej pochodnej wymusza zerowanie się zarówno funkcji jak i symulowanego zjawiska.

3.6 Metody siatkowe jako wynik dyskretnej projekcji operatorów różnicowych

W niniejszym podrozdziale zostanie przeanalizowana relacja projekcji dyskretnej postaci (3.33), i ciągłej, definiującej algorytmy siatkowe, zaprezentowane w rozdziale 2.2. W szczególności zostaną rozważone algorytmy analogiczne do MRTD [28, 48], budowane w oparciu o falki Haara i Battle-Lemarie. Rozwinięcia falkowe, bardzo chętnie wykorzystywane w przetwarzaniu sygnałów, próbowano również zaadaptować do elektrodynamiki obliczeniowej. Pierwsze próby dotyczyły zdefiniowania algorytmu czasowego, podobnego do FDTD, w oparciu o falki Battle-Lemarie [48]. W innych podejściach [28] użyto falek Haara, które mogą być uważane za naturalne rozszerzenie FDTD. Ze względu na fakt, że nie są one ciągłe, niezbyt dobrze nadają się do aproksymacji pól elektromagnetycznych. Zanotowano co prawda pewną poprawę wydajności algorytmu HAAR-MRTD w stosunku do FDTD [25, 28], głównie dzięki łatwości lokalnego rozrzedzenia siatki i nieco większemu (kilkanaście %) krokowi czasowemu. Pewnym kompromisem było zastosowanie falek Dau-



RYSUNEK 3.3: Szkic rozwiązania problemu z przykładu 3.1 w przypadku projekcji operatora wyjściowego z użyciem tych samych funkcji bazowych i testujących (a) oraz różnych (b).

bechies [29], które miały jednocześnie ograniczony nośnik jak i nieco gładzszy kształt, lepiej dostosowany do kształtów pól. Pomimo intensywnych prób, nie udało się jednak jak dotąd zakorzenić tego typu algorytmów w elektrodynamice obliczeniowej.

Algorytm siatkowy, zbudowany w oparciu o różniczkowe sformułowanie równań Maxwella, rozumiany tak jak opisano w rozdziale 2.2, można jednoznacznie określić poprzez współczynniki a_n , zdefiniowane jako:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(x) \frac{d}{dx} \mathbf{f}(x - d - n) dx \quad (3.53)$$

gdzie d jest zadany arbitralnie przesunięciem. Całkowanie w przedziale $(-\infty, +\infty)$ w praktyce ogranicza się do całkowania po nośniku funkcji \mathbf{f} , ewentualnie wyłącza się z całkowania obszar gdzie funkcja ta przybiera pomijalnie małe wartości. W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawiona konstrukcja różnych algorytmów siatkowych z wykorzystaniem projekcji dyskretnej i traktując ją jako całkowanie numeryczne (3.1).

Operację opisaną zależnością (3.53) można zastąpić projekcją operatora macierzowego pierwszej pochodnej \mathbf{D} na odpowiednio zbudowaną bazę (w \mathcal{R}^n). Przybliżoną zależność na współczynniki a_n w formalizmie projekcji dyskretnej można zdefiniować następująco:

$$[a_{-N'}, \dots, a_{N-1}, a_N] = \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (3.54)$$

Wektor \mathbf{w} zawiera próbki funkcji \mathbf{f} w węzłach siatki dualnej (3.11a), natomiast \mathbf{V} zawiera wektory zdefiniowane w oparciu o próbki $\mathbf{f}(x - d - n)$, gdzie $n = -N'..N$. Projekcja (3.54) daje w rezultacie macierz $1 \times N + N' + 1$, zawierającą współczynniki a_n , obliczone w sposób przybliżony. Przy zamianie wektora \mathbf{w} na macierz próbek odpowiednio przesuniętych funkcji testujących \mathbf{W} , projekcja (3.54) daje w rezultacie macierz operatora pierwszego rzędu przeniesioną w nową przestrzeń. Innymi słowy, algorytm FDTD (oparty na macierzy \mathbf{D} i pochodnych) zostaje przetransformowany np. w MRTD.

Nasuwa się oczywiście pytanie, czy fakt ten może mieć jakiegokolwiek praktyczne zastosowanie. Przeważnie implementacja tego typu algorytmów opiera się na jawnej implementacji

Projekcja operatora pierwszej pochodnej \mathbf{D}

$$\mathbf{D}' = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (3.59)$$

powinna dawać operator zbliżony do uzyskanego w przypadku bezpośredniej dyskretyzacji pochodnej dla rzadszej siatki, $\Delta x' = P \Delta x$. Okazuje się, że w tym przypadku macierze te są równe. Jest to intuicyjnie zrozumiałe, gdyż całkowanie dotyczy funkcji odcinkami stałych, czyli przy odpowiednim doborze przedziałów całkowania przybliżenie (3.2) staje się równością. Oczywiście funkcje bazowe i testujące powinny być przesunięte względem siebie, jak opisano w (2.2.1). Przesunięcie to niejawnie uzyskuje się dzięki dyslokacji siatki dualnej i pierwotnej operatora \mathbf{D} . W ten sposób, nawet warunek $\mathbf{W}=\mathbf{V}$ nie jest równoważny użyciu tych samych funkcji bazowych i testujących w przestrzeni ciągłej. Próbkki zgromadzone w macierzach projekcyjnych są bowiem określone w innych punktach przestrzeni, co oznacza przesunięcie równoważne co najmniej $\frac{1}{2}\Delta x$. Jako że wartość całki (3.53), dla $\phi(x)$ (3.56) i $d \in (0, 1)$ nie zależy od d , więc dla uproszczenia, będą użyte takie same wektory bazowe i testujące, wszędzie gdzie to jest możliwe.

Przepróbkowywanie jednej siatki różnicowej na drugą może się wydawać nieco egzotyczną operacją, stanowi jednak kontekst do bardziej złożonych algorytmów, ale przede wszystkim jest niezwykle istotną operacją w przypadku budowy algorytmów hybrydowych, bardzo łatwo definiowalnych w ramach prezentowanego formalizmu projekcyjnego.

Przykład 3.6 Jak już pokazano w przykładzie (3.3), przepróbkowania (rozrzedzenie) siatki metodą projekcji można dokonywać tylko na operatorze pierwszego rzędu \mathbf{D} (1.23). Niech wyjściowy problem zdefiniowany jako

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{f}(x) = \lambda^2 \mathbf{f}(x) \quad (3.60a)$$

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(\pi) = 0 \quad (3.60b)$$

będzie zdyskretyzowany metodą różnic skończonych na siatce o liczbie oczek $N = 100$. Wymaga to zdefiniowania układu równań macierzowych, z dodatkowym wektorem pomocniczym \mathbf{g} :

$$\mathbf{D} \mathbf{g} = \lambda^2 \mathbf{f} \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{D}^T \mathbf{f} = \mathbf{g} \quad (3.61b)$$

który sprowadzany jest do problemu własnego w sposób opisany w podrozdziale 3.2.2. Do projekcji użyte będą wektory bazowe ${}^h \mathbf{u}^{0,5}$ (3.57), tak by wynikowy rozmiar problemu wynosił $M = 20$. Macierz projekcyjna \mathbf{V} może w takim przypadku być zdefiniowana z wykorzystaniem iloczynu tensorowego jako

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_{20} \otimes [{}^h \mathbf{u}^{0,5}] \quad (3.62)$$

gdzie \mathbf{I}_{20} reprezentuje macierz jednostkową o rozmiarze 20×20 . Projekcja $\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}$ operatora \mathbf{D} z użyciem (3.62) daje w wyniku macierz \mathbf{D}' o odpowiednio przeskalowanych elementach. Macierz wyjściowa jest zdefiniowana dla 100 zmiennych (łącznie z brzegowymi), odpowiednio macierz po projekcji, dla 20. Wymuszenie zerowych warunków brzegowych, polegające na usunięciu granicznych węzłów zmienia ich liczbę do, odpowiednio, 98 i 18. Pomimo, że

wartości w macierzy dokładnie odpowiadają wyznaczonym metodą bezpośredniej dyskretyzacji, okazuje się, że obie macierze opisują różne struktury. Szczegółowa analiza sformułowania różnicowego (1.15) pokazuje, że długość struktury „widziana” przez siatkę wynosi $(N - 1)\Delta x$. Wynika stąd, że jeśli w problemie wyjściowym dziedzina problemu stanowiła odcinek o długości L , to dziedzina problemu po rzutowaniu ma długość

$$L' = \frac{M - 1}{N - 1} \frac{N}{M} L \quad (3.63)$$

W omawianym przypadku, czyli dla $N/M = 5$, wartość ta jest równa 1.0421, co dokładnie odpowiada różnicy wartości λ zebranych tabeli 3.4. Kształt pierwszego wektora własnego dla obu rozwiązań przedstawiono na wykresie 3.4. Wyraźnie widoczne jest przesunięcie punktów, gdzie funkcja się zeruje. Można przyjąć, że numerycznie dziedzina uległa skróceniu o około 4%.

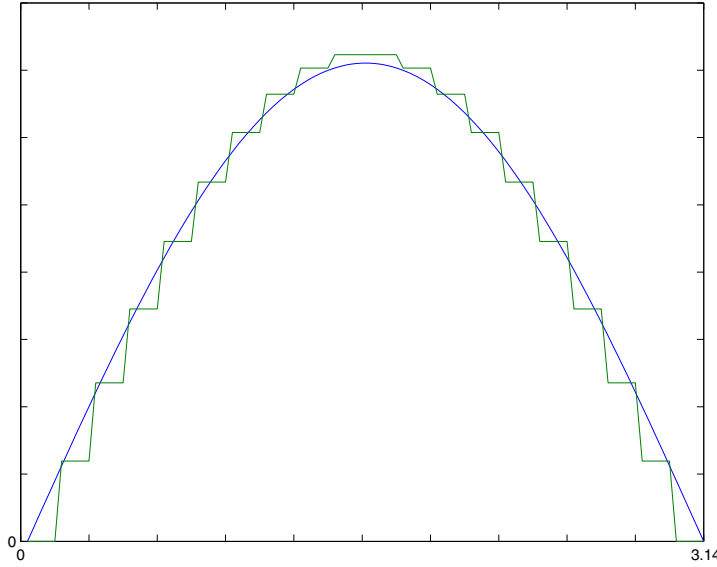
Powyższy przykład pokazuje, że o ile dokonywanie wszelkich zmian we wnętrzu dziedziny metodą dyskretną projekcji jest proste i efektywne, o tyle można spodziewać się problemów w obszarach brzegowych. Szczególnie w algorytmach stosujących rozwinięcia falkowe jest to znaczący problem, który rozwiązywany jest albo przez tworzenie algorytmów hybrydowych [97], albo użycie zaawansowanych technik, jak np. metoda obrazów [15]. Wspomniane rozwiązania dotyczą implementacji ścianek elektrycznych na brzegu dziedziny. Doskonale przewodzące elementy we wnętrzu analizowanej struktury są wielkim wyzwaniem dla każdego z algorytmów MRTD [82].

TABELA 3.4: Porównanie kilku najmniejszych wartości λ problemu (3.61) dla siatki gęstej, rzadkiej, oraz rozrzedzonej metodą dyskretną projekcji. Jak widać, projekcja na siatkę o liczbie oczek $M = 20$ daje rozwiązania identyczne jak bezpośrednia dyskretyzacja mniejszej dziedziny z zachowaniem kroku siatki.

Problem wyjściowy, 98 węzłów niezerowych	Problem rzutowany, 18 niezerowych zmiennych	Problem bezpośrednio zdyskretyzowany dla 18 węzłów
0.99996	1.0409	1.0409
1.9997	2.0747	2.0747
2.9989	3.0944	3.0944
3.9973	4.0929	4.0929
4.9948	5.0634	5.0634
5.9909	5.9994	5.9994
6.9856	6.8943	6.8943
7.9785	7.7422	7.7422

3.6.1 Falki Haara

Zwiększenie dokładności algorytmu opartego na funkcjach bazowych (3.56) można osiągnąć dwojako. Albo przez zagęszczenie siatki, czyli definiowanie funkcji $\phi(Nx)$ (3.56) dla odpowiednio dużego N , albo poprzez zwiększenie liczby funkcji w obrębie tej samej poddziedziny. Intuicyjnym rozszerzeniem bazy (3.56) jest zdefiniowanie dodatkowych funkcji



RYSUNEK 3.4: Pierwszy wektor własny otrzymany przez rozwiązanie problemu różnicowego $N = 100$ przepróbkowanego do $M = 20$. Dla drugiego przypadku nie stosowano liniowej interpolacji między próbkami pola, co pozwala zobaczyć dokładne położenie funkcji bazowych (3.57) oraz zera rozwiązania problemu po rzutowaniu.

w oparciu o falki Haara. Falkę Haara rzędu zerowego definiuje się identycznie jak funkcję bramkową (3.56), natomiast pierwszego rzędu jako

$$\psi^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{pozostałe } x \end{cases} \quad (3.64)$$

Analogicznie, falki wyższych rzędów, można zdefiniować rekurencyjnie

$$\psi^n(x) = 2^n \psi^{n-1}(nx) \quad n = 2, 4, 8, \dots, 2^m \quad (3.65)$$

W taki sposób pojedyncza komórka, definiowana jako nośnik funkcji wyjściowej $\phi(x)$ może być rozwinięta w 1,2,4,8 i więcej funkcji. Taki sposób zagęszczania siatki jest charakterystyczny dla metod MRTD [28, 81, 97]. Analogicznie do (3.57) zdefiniowana zostanie falka $\psi^1(x)$ (3.64) w przestrzeni dyskretnej. Jawna postać odpowiedniego wektora bazowego to

$$h_{u_p}^{1,P} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{P}}, & p \leq \frac{P}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{P}}, & p > \frac{P}{2} \end{cases} \quad (3.66)$$

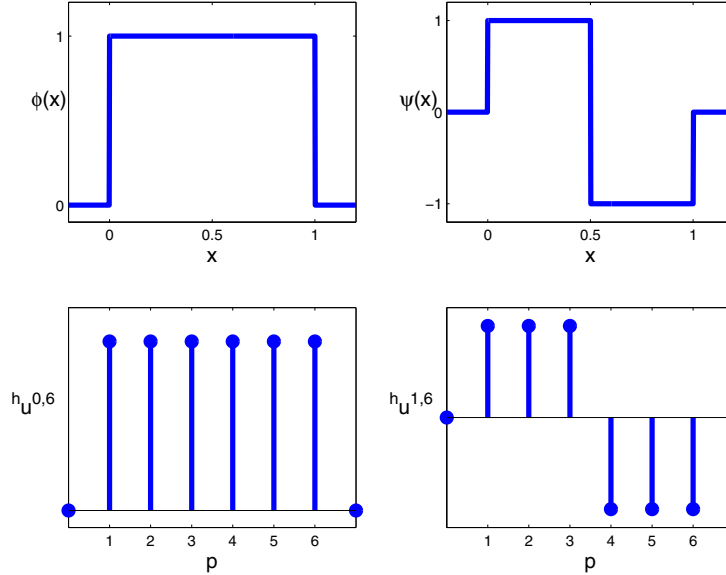
Jak widać, aby zachować symetrię wektora (por. rys. 3.5), a co za tym idzie także jego ortogonalność do $h_{\mathbf{u}}^{0,P}$ (3.57) rozmiar komórki wyrażony w liczbie węzłów siatki tła P powinien być parzysty. W ogólnym przypadku użycia funkcji bazowych wyższego rzędu, rozmiar ten

powinien być potęgą dwójki. Dyskretna projekcja operatora \mathbf{D} z użyciem macierzy

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & h\mathbf{S}^{1,P} & & & & \\ & & h\mathbf{S}^{1,P} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & h\mathbf{S}^{1,P} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$h\mathbf{S}^{1,P} = [h\mathbf{u}^{0,P} | h\mathbf{u}^{1,P}] \quad (3.68)$$

daje macierz identyczną ze zdefiniowaną bezpośrednio z wykorzystaniem całkowania w przestrzeni \mathcal{L}_2 (3.53) [25], podobnie jak w poprzednim przypadku. Właściwość ta pozwala przejść z dziedziny MRTD do FDTD minimalnym nakładzie obliczeniowym.



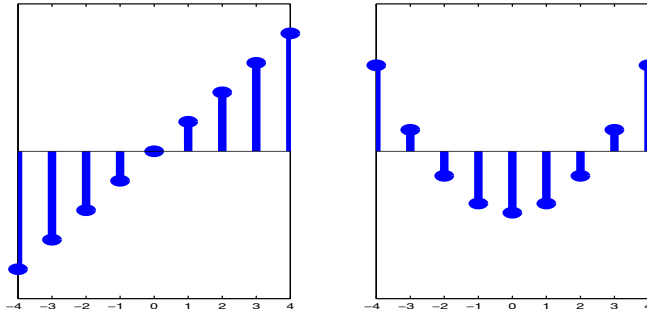
RYSUNEK 3.5: Falki Haara zerowego i pierwszego stopnia oraz ich zdyskretyzowane odpowiedniki

3.6.2 Rozszerzenie koncepcji metod siatkowych

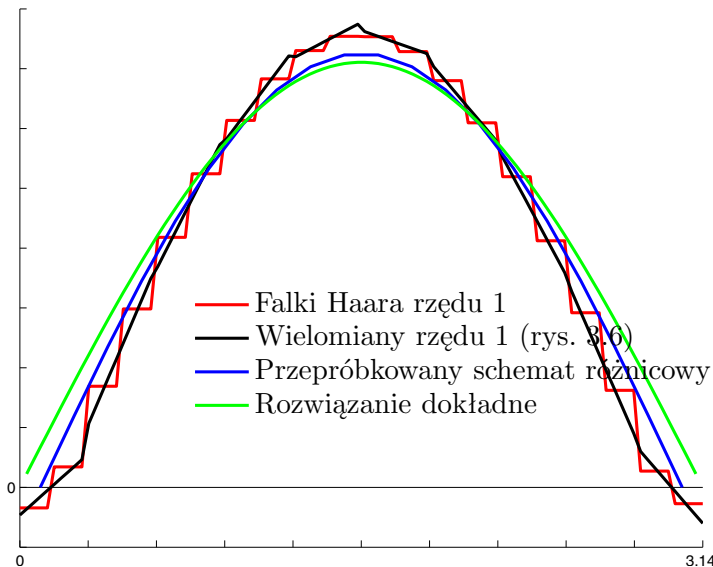
Formalizm projekcji dyskretniej pozwala rozszerzyć klasę funkcji bazowych na inne niż wykorzystywane i dobrze zdefiniowane w przestrzeni ciągłej. Szeroko omówione będą tu wektory skonstruowane w oparciu o próbki wielomianów Legendre'a. Nie mają one odpowiednika wśród funkcji używanych do projekcji w przestrzeni ciągłej. Charakter rozwinięcia z ich użyciem jest podobny do wykorzystywanych w poprzednio analizowanych rozwinięciach falkowych w tym sensie, że każdy podobszar opisywany jest kilkoma funkcjami. Nie mają one własności charakterystycznych dla falek, jak ortogonalność względem przesunięcia, nie spełniają także równania dylatacji (2.39) [81]. Mimo to z powodzeniem można je wykorzystać do analizy elektromagnetycznej, wielomiany bowiem dobrze odwzorowują charakter zmienności pól elektromagnetycznych. Punktem wyjścia do określenia wektorów bazowych będą wielomiany Legendre'a $P(x)$, które są ortogonalne na przedziale $x \in (-1, 1)$. Wektor bazowy ${}^l u_p^{n,P}$ reprezentujący n tą funkcję zdefiniowaną na poddziedzinie o długości P , mierzonej w węzłach siatki tła, ma postać

$${}^l u_p^{n,P} = b P^n \left(2 \frac{p-1}{P-1} - 1 \right) \quad (3.69)$$

gdzie b jest stałą normalizującą. Niestety, występuje tu przypadek wspomniany w rozdziale 3.1, czyli ortogonalność w przestrzeni \mathcal{L}_2 nie przekłada się na ortogonalność próbek (3.69) w \mathcal{R}^n . Dlatego wektory (3.69) muszą być ortogonalizowane już w przestrzeni dyskretnej. Dla typowych wielkości nośnika P rzędu kilku do kilkunastu oczek, koszt tej operacji jest jednak pomijalny. Projekcja z użyciem (3.69) prowadzi do zdefiniowania rozłącznych, niezachodzących na siebie poddziedzin. Jest to istotna różnica w stosunku do elementów Lagrange'a używanych w metodzie elementów skończonych, z którymi można by kojarzyć opisywane funkcje. W tych ostatnich bowiem sąsiednie funkcje bazowe częściowo pokrywają się [27].



RYSUNEK 3.6: Dyskretne wektory bazowe zbudowane z próbek wielomianów Legendre'a, $l_{\mathbf{u}}^{1,8}$ i $l_{\mathbf{u}}^{2,8}$



RYSUNEK 3.7: Wektory własne otrzymane przez rozwiązanie problemu z użyciem baz projekcyjnych Haara i wielomianowych.

Przykład 3.7 Kolejny przykład dotyczy rozwiązania problemu własnego (3.60) z użyciem zdyskretyzowanych falek Haara (3.68) oraz wielomianów (3.69). Rozmiar siatki wynikowej dobrano tak, aby rozmiar problemu był zbliżony do uzyskanego w poprzednim przykładzie. Stąd, zdecydowano się na podział dziedziny na 10 podobszarów, w każdym z nich zdefiniowane są dwie funkcje bazowe. Bezpośrednia postać podmacierzy projekcyjnej ${}^h\mathbf{S}^{1,10}$,

reprezentującej dyskretne falki Haara dla omawianego przypadku to

$${}^h\mathbf{S}^{1,10} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Podmacierz projekcyjna reprezentująca wielomiany Legendre'a, ${}^l\mathbf{S}^{1,10}$, wygląda następująco:

$${}^l\mathbf{S}^{1,10} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{-7}{9} \\ 1 & \frac{-5}{9} \\ 1 & \frac{-3}{9} \\ 1 & \frac{-1}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} \\ 1 & \frac{3}{9} \\ 1 & \frac{5}{9} \\ 1 & \frac{7}{9} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 2.018 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Dodatkowa macierz normalizująca o wartościach $\frac{1}{\sqrt{10}}$ i $\frac{1}{385} \sqrt{28526723} \approx 2.018$ została wydzielona dla przejrzystości zapisu (3.71). Macierze projekcyjne \mathbf{V} buduje się analogicznie do (3.68), jako

$${}^h\mathbf{V} = \mathbf{I}_{10} \otimes {}^h\mathbf{S}^{1,10} \quad (3.72)$$

w przypadku falek Haara oraz jako

$${}^l\mathbf{V} = \mathbf{I}_{10} \otimes {}^l\mathbf{S}^{1,10} \quad (3.73)$$

dla rozwinięcia w dyskretne wielomiany Legendre'a. Macierze projekcyjne, odpowiednio ${}^h\mathbf{W}$ i ${}^l\mathbf{W}$ zdefiniowano identycznie jak (3.72) i (3.73). Jak widać, w obu przypadkach definiowane są rozłączne poddziedziny o długości, mierzonej w liczbie pokrytych węzłów siatki tła, równej 10. Wyniki rozwiązywania problemu własnego w określonych powyżej podprzestrzeniach przedstawiono w tabeli 3.5, natomiast na ilustracji 3.7 pokazano kształt wektora własnego związanego z najmniejszą wartością własną uzyskanego dla obu metod. W odróżnieniu od rysunku 3.4, wykres funkcji otrzymanej w wyniku rozwiązania problemu różnicowego dla rzadkiej siatki wygładzono stosując liniową interpolację wartości między węzłami siatki. Jest to zgodne ze zwyczajowym sposobem prezentacji wyników otrzymanych tą metodą. Na tym samym wykresie widać, jak przesunęło się położenie zer rozwiązania w przypadku wykorzystania różnych wektorów bazowych. Ich położenie determinuje wartości własne, które jak widać w tabeli 3.5, znacznie odbiegają od spodziewanych.

TABELA 3.5: Rezultaty w postaci kilku najmniejszych wartości λ problemu (3.60) uzyskanych przez rzutowanie problemu różnicowego na zdyskretyzowane funkcje Haara (3.70) i wielomiany (3.71), oznaczone jako LEG. Dla porównania przytoczono wybrane wartości z tabeli 3.4.

Haar	LEG	FD M=20	FD N=100
1.133	1.151	1.0409	0.99996
2.2559	2.2999	2.0747	1.9997
3.3587	3.4427	3.0944	2.9989
4.4313	4.571	4.0929	3.9973
5.4639	5.668	5.0634	4.9948
6.4463	6.7001	5.9994	5.9909
7.3683	7.5969	6.8943	6.9856
8.2193	8.2051	7.7422	7.9785
8.9877	9.2481	8.5372	8.9694

3.6.3 Falki Battle-Lemarie

Falki Battle-Lemarie zostały wykorzystane jako jedne z pierwszych w algorytmach MRTD [48]. Zwartą postać falki Battle-Lemarie można znaleźć tylko w dziedzinie transformat Fouriera jako

$${}^{bl}\tilde{\phi}(\omega) = \frac{\text{sinc}^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{5}\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{4}{315}\sin^6\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \quad (3.74)$$

Obliczenie współczynników (3.53) w sposób zaproponowany w [48] wymaga obliczenia całki

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} {}^{bl}\phi(x - 0.5) \frac{d}{dx} {}^{bl}\phi(x - n) dx \quad (3.75)$$

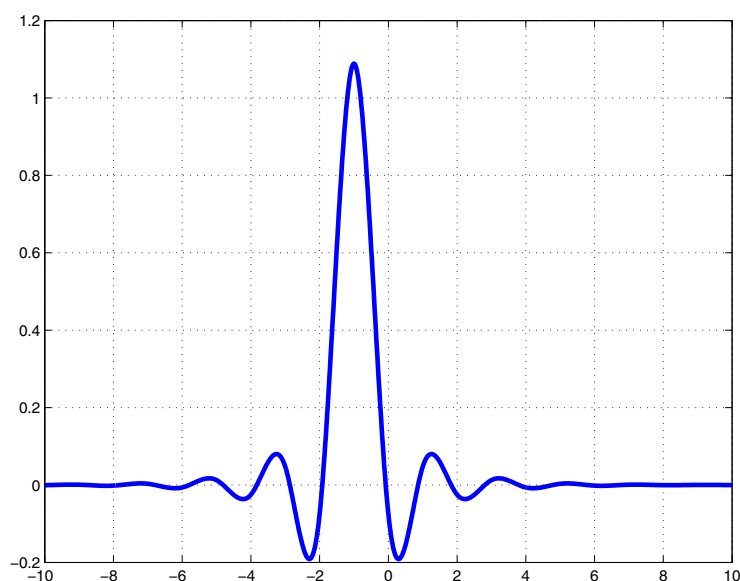
W omawianym przypadku zamiast (3.75), wygodniej jest wykonać całkowanie w dziedzinie transformat Fouriera, wykorzystując izometrię [81]

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^{bl}\phi(x) {}^{bl}\phi(x - n) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} {}^{bl}\tilde{\phi}(\omega) {}^{bl}\tilde{\phi}^*(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.76)$$

Dyskretna projekcja postaci (3.54) wymaga jednak zdefiniowania próbek $\phi(x)$ w dziedzinie rzeczywistej. Można je znaleźć wykorzystując odwrotną dyskretną transformację Fouriera. Takie podejście pozwala znaleźć wartość bezpośrednio w pożądanym punkcie. Problem całkowania po nieskończonej dziedzinie można rozwiązać uwzględniając fakt, że dla $|x| > 20$ funkcja ta ma znikomą wartość (poniżej 10^{-4}) i jej obcięcie nie powoduje znaczących błędów. Taką też przyjęto dziedzinę na jakiej określone były próbki funkcji. Wyniki dyskretnej projekcji z użyciem tak zbudowanych wektorów bazowych, w postaci błędów w określeniu współczynników a_n , przedstawiono w tabeli 3.6. Przedział całkowania $x \in (-20, 20)$ został podzielony na 100 do 5000 węzłów. Jako odniesienia użyto wyników wartości otrzymanych przez całkowanie (3.74) w dziedzinie widma, korzystając z programu Maple. Jak widać, osiągnięcie dobrej dokładności wymaga użycia wektorów o znacznej długości, co praktycznie wyklucza możliwość tworzenia wspomnianego algorytmu jako wyniku projekcji dyskretnej.

TABELA 3.6: Błędy w określeniu współczynników algorytmu falkowego Battle-Lemarie (3.75) metodą projekcji operatora \mathbf{D} , zależnie liczby oczek siatki $t\Delta$, oznaczonej jako N . Funkcja bazowa była próbkowana w stałym przedziale $x \in (-20, 20)$

	Wartość odniesienia	N=100	N=200	N=500	N=1000	N=2000	N=5000
		err. [%]	err. [%]	err. [%]	err. [%]	err. [%]	err. [%]
a_0	-1.291846	-3.977584	-1.016203	-0.159172	-0.039760	-0.009924	-0.001587
a_1	0.156076	-18.326501	-4.656559	-0.726567	-0.181457	-0.045285	-0.007242
a_2	-0.059639	-18.884359	-4.954294	-0.766765	-0.191745	-0.047839	-0.007651
a_3	0.029310	-19.438059	-5.011282	-0.775724	-0.193859	-0.048366	-0.007735
a_4	-0.015372	-19.179133	-5.018720	-0.777332	-0.194362	-0.048494	-0.007755
a_5	0.008189	-19.397748	-5.013151	-0.778105	-0.194470	-0.048524	-0.007760
a_6	-0.004379	-19.225067	-5.003704	-0.777980	-0.194483	-0.048531	-0.007762
a_7	0.002343	-19.344115	-4.992623	-0.778162	-0.194476	-0.048536	-0.007765
a_8	-0.001254	-19.241729	-4.980537	-0.778056	-0.194470	-0.048545	-0.007774

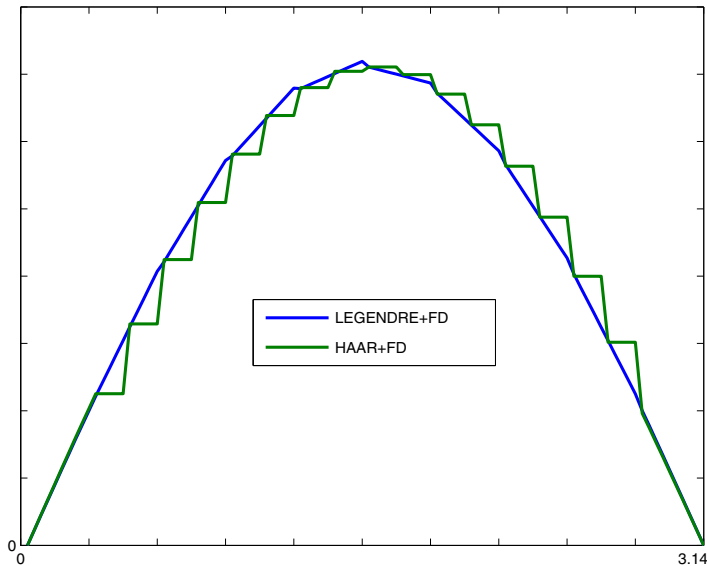


RYSUNEK 3.8: Falka Battle-Lemarie $^{bl}\phi(x)$, (3.74)

3.7 Algorytmy hybrydowe

Zwieńczeniem zaprezentowanych rozważań jest konstrukcja algorytmów hybrydowych w ramach formalizmu dyskretnej projekcji. Łączenie dziedzin opisanych za pomocą różnych funkcji bazowych było zarówno przyczynkiem, jak i jest stałym bodźcem do rozwijania opisanych powyżej sformułowań, począwszy od łączenia PEE z dziedziną różnic skończonych [113], a skończywszy na swobodnym mieszaniu różnych funkcji bazowych w ramach jednej dziedziny ([117]).

Choć Metoda Różnic Skończonych ma niewątpliwe zalety, w szczególności jej postać w dziedzinie czasu pozwalająca definiować problemy o rozmiarach rzędu milionów zmiennych, najlepiej sprawdza się w analizie struktur o regularnych kształtach. Komplikacja geometrii analizowanej struktury prowadzi do lawinowego wzrostu liczby zmiennych. Oczywiście moż-



RYSUNEK 3.9: Wykresy rodzaju podstawowego dla rozwinięcia wielomianowego i Haara środkowej części dziedziny. Oprócz punktów podziału dziedzin, w środkowej części wykresu widać nieciągłość rozwiązania z wykorzystaniem wielomianów.

na uniknąć nadmiernego rozmiaru problemu stosując dobrze udokumentowane algorytmy aproksymacji zarówno elementów dielektrycznych jak i metalowych zawsze wymagają one jednak i tak gęstszej siatki niż dla jednorodnej struktury. Przy definiowaniu gęstych siatek pojawia się problem niepotrzebnego nadpróbkowania pól w jednorodnych regionach struktury. Zagadnienie to zostało podchwyczone przez twórców algorytmów falkowych. Autorzy utrzymują, że stosując np. falki Battle-Lemarie można zejść z gęstością próbkowania w przestrzeni do granicy Nyquista [48], albo przynajmniej w prosty sposób liczbę tych zmiennych ograniczyć. Przykładowo, stosując schemat Haara różnego rzędu w różnych fragmentach analizowanej struktury [25], można poprawić wydajność o kilkanaście procent w stosunku do FDTD [28]. Algorytmy te doskonale sprawdzają się w jednorodnych fragmentach przestrzeni, implementacja granic dielektrycznych prowadzi do podobnej jak w metodzie różnic skończonych aproksymacji [28], natomiast wprowadzenie metalu do struktury jest bardzo skomplikowane i powoduje znaczne błędy, co pokazano w publikacji [82]. Wspomniane problemy stymulują rozwój algorytmów łączenia rozwinięć falkowych z różnicami skończonymi tam, gdzie te ostatnie są dokładniejsze i wygodniejsze do zastosowania. Dodatkowym bodźcem do rozwoju metod hybrydowych była możliwość użycia dobrze zdefiniowanych warunków absorpcyjnych PML [10, 23, 30, 93] w algorytmach MRTD [97].

3.7.1 Konstrukcja algorytmów hybrydowych w ramach dyskretnej projekcji

Zakładając, że macierz problemu otrzymuje się przez rzutowanie macierzy różnicowej \mathbf{D} na podprzestrzeń rozpiętą na arbitralnie zadanych macierzach \mathbf{W} i \mathbf{V} , można przyjąć, że dowolny algorytm jest jednoznacznie określony poprzez podanie macierzy projekcyjnych. Dlatego opis tworzenia algorytmów hybrydowych ogranicza się do zdefiniowania generujących je macierzy projekcyjnych. Jako najprostsze, zostaną przeanalizowane przypadki

łączenia dziedzin różnic skończonych z zaprezentowanymi powyżej schematami bazującymi na falkach Haara (3.70) czy próbkach wielomianów (3.71). Aby rozważyć problem na konkretnym przykładzie, niech dziedzina obliczeniowa $(0, \pi)$ zdyskretyzowana metodą różnic skończonych, z $N = 100$ węzłami zostanie podzielona na trzy fragmenty. Rozwinięcia będą zastosowane w środkowej części, to jest od 11 do 90 węzła, natomiast obszary brzegowe pozostaną niezmodyfikowane. Do rozwinięć użyte będą takie same funkcje jak w przykładzie 3.7, czyli falki Haara i próbki wielomianów (3.69) z nośnikiem o rozmiarze $P = 10$. Macierz projekcyjną dla przypadku rozwinięcia w funkcje wielomianowe można zapisać, zachowując formalizm (3.90) jako

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{10} & & \\ & \mathbf{I}_8 \otimes {}^l\mathbf{S}^{1,10} & \\ & & \mathbf{I}_{10} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Macierze jednostkowe w (3.77) nie modyfikują algorytmu różnicowego we fragmentach dziedziny bliskich brzegu, natomiast macierz $\mathbf{I}_8 \otimes {}^l\mathbf{S}^{1,10}$ definiuje rozwinięcie identyczne jak (3.58), ograniczone jedynie do poddziedziny między 11 a 90 węzłem siatki tła. Rozwiązanie problemu własnego (3.60) z wykorzystaniem tak zdefiniowanej macierzy projekcyjnej zestawiono w tabeli 3.7, natomiast wykresy pierwszego wektora własnego na rys. 3.9. Jak widać, dzięki dobremu zdefiniowaniu warunków brzegowych, osiągnięto dokładność porównywalną ze schematem różnicowym przy znacznie mniejszej liczbie zmiennych.

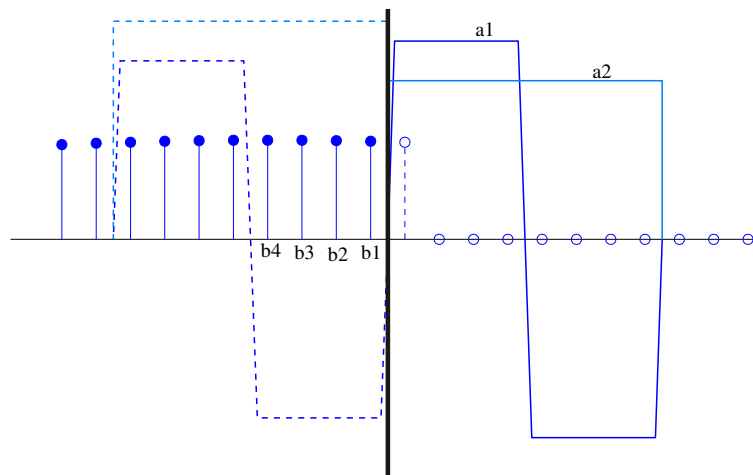
TABELA 3.7: Błędy w określeniu kilku mniejszych wartości λ porównane do wartości analitycznych, przy zastosowaniu rozwinięcia Haara oraz wielomianowego z zachowaniem różnic skończonych w rejonach brzegowych. Testy wykonano dla wielkości rejonu brzegowego wielkości 10 oczek siatki tła.

Wartość dokładna	Haar+FD 10 oczek, błąd w procentach	Legendre+FD 10 oczek, błąd w procentach
1	-0.073770	-0.0047903
2	-0.35880	-0.026445
3	-0.90579	-0.088108
4	-1.5853	-0.23373
5	-2.2368	-0.54051
6	-2.9217	-1.1479
7	-3.8697	-2.3251
8	-5.2552	-4.6242
9	-7.0254	-9.0776
10	-8.9194	-2.3845

3.7.2 Klasyczne algorytmy hybrydowe a rzutowanie

Obszar brzegowy o wielkości 10 oczek, czyli równy rozmiarowi komórki siatki wynikowej nie został w poprzednim przykładzie wybrany przypadkowo. Można się spodziewać, że projekcja dyskretna będzie równoważna schematom łączenia dziedzin opisanych za pomocą różnych funkcji bazowych, omawianym np. w [97], [47] czy [113]. We wszystkich przypadkach do znalezienia relacji między współczynnikami rozwinięć w obu regionach korzysta się

z iloczynu skalarnego, czy to jawnie, czy w postaci FWT³. Poniżej zostanie rozpatrzony przypadek najprostszy, jakim jest łączenie dziedziny opisanej falekmi Haara i dziedziną różnic skończonych. Schematycznie układ próbek w obu regionach naszkicowano na rys. 3.10. Łączenie dziedzin opisanych przy pomocy różnych funkcji bazowych wymaga zdefiniowania transformacji między jedną a drugą reprezentacją. W przypadku łączenia algorytmu falkowego Haara z Metodą Różnic Skończonych (rys. 3.10), konieczne jest zdefiniowanie brakujących falek (zaznaczonych po lewej stronie linią przerywaną) za pomocą próbek pół na siatce Yee i odwrotnie, wyrażenie brakującej próbki różnicowej w funkcji falek Haara opisujących dany region. Pierwsza z wymienionych transformacji wymaga obliczenia iloczynu skalarnego falek i próbek różnic skończonych. Z tego powodu konieczne jest, aby obszar przejściowy po lewej stronie równy był wielkości falek Haara zdefiniowanych przy granicy dziedzin. W szczególności w obszarze przejściowym nie powinna kończyć się dziedzina obliczeniowa. W przypadku konwersji w drugą stronę, wykorzystuje się funkcje bazowych po prawej stronie granicy dziedzin do brakującej próbki pola, leżącej tuż przy granicy. Taka metodologia łączenia dziedzin została zaprezentowana w [97]. W przypadku przejścia z algorytmu różnicowego na MRTD metodą projekcji identyczny schemat otrzymuje się w sposób automatyczny.



RYSUNEK 3.10: Ilustracja położenia próbek pola w przypadku łączenia dziedzin. Dziedzina z lewej strony opisana jest za pomocą różnic skończonych, natomiast z prawej MRTD Haara. Budowa odpowiedniego operatora pochodnej wymaga zdefiniowania brakujących falek (linia przerywana) za pomocą próbek FD. Do tego celu konieczne jest uwzględnienie wszystkich próbek leżących w obszarze brakującej komórki Haara.

Algorytmy różnicowe o nieregularnej siatce i subgridding

Jako szczególny przypadek metody hybrydowej można uznać dwa interesujące przypadki - sformułowanie różnicowe na nieregularnej siatce oraz subgridding, czyli łączenie obszarów różnic skończonych w których zdefiniowano siatki o różnych gęstościach.

³Fast Wavelet Transform

IFD M=27	irrFD M=27
0.0511	0.0945
-0.1245	0.1175
-0.5246	-0.2654
-1.1337	-0.9962
-1.8973	-1.8604
-2.8183	-2.8229

TABELA 3.8: Zestawienie błędów w określe-
niu wartości λ (3.61) w porównaniu do warto-
ści dokładnych dla rozwiązań metodą różnic
skończonych dla nieregularnej siatki o 27 wę-
złach. Nieregularną siatkę uzyskano poprzez
dyskretną projekcję (IFD) oraz bezpośrednią
dyskretyzację z zastosowaniem schematu (1.2)
(irrFD)

Niech równanie (3.60) będzie zdyskretyzowane metodą różnic skończonych na siatce o liczbie oczek $N = 100$. Sformułowanie to zostanie przepróbkowane z użyciem wektorów (3.57), o rozmiarze P zmieniającym się od 1 przy brzegach do 5 w środkowym rejonie dziedziny, czyli macierz projekcyjną można zapisać jako:

$$\mathbf{V} = \text{qdiag} \left[{}^h\mathbf{S}^{0,1}, {}^h\mathbf{S}^{0,1}, {}^h\mathbf{S}^{0,2}, {}^h\mathbf{S}^{0,3}, {}^h\mathbf{S}^{0,4}, {}^h\mathbf{S}^{0,5}, \dots, \right. \\ \left. {}^h\mathbf{S}^{0,5}, {}^h\mathbf{S}^{0,4}, {}^h\mathbf{S}^{0,3}, {}^h\mathbf{S}^{0,2}, {}^h\mathbf{S}^{0,1} \right] \quad (3.78)$$

Wartości własne problemu rzutowanego za pomocą macierzy (3.78) przedstawiono w tabeli 3.8, w rubryce oznaczonej jako IFD. Dla porównania zamieszczono wyniki uzyskane dla klasycznego sformułowania różnicowego dla siatki nieregularnej (irrFD). Co ciekawe, wyniki tego ostatniego są inne (dokładniejsze), co oznacza, że oba sformułowania nie są równoważne. Istotnie, analizując budowę schematu różnic skończonych metodą Rayleigha-Ritza można zauważyć, że daje on w tym przypadku inne wyniki niż bezpośrednia dyskretyzacja (1.2).

Od sformułowania metod projekcji dla nieregularnej siatki już tylko krok do dyskusji algorytmów z siatkami o różnej gęstości. Przykłady takiej analizy wymagają zbudowania problemów wielowymiarowych, i będą zaprezentowane w rozdziale poświęconym prezentacji zastosowań metod projekcji w elektrodynamice, jednak już w tym miejscu można częściowo naświetlić problemy związane z tym zagadnieniem. Niech wyjściowy problem o rozmiarze $N = 100$, będzie rzutowany z użyciem następującej macierzy

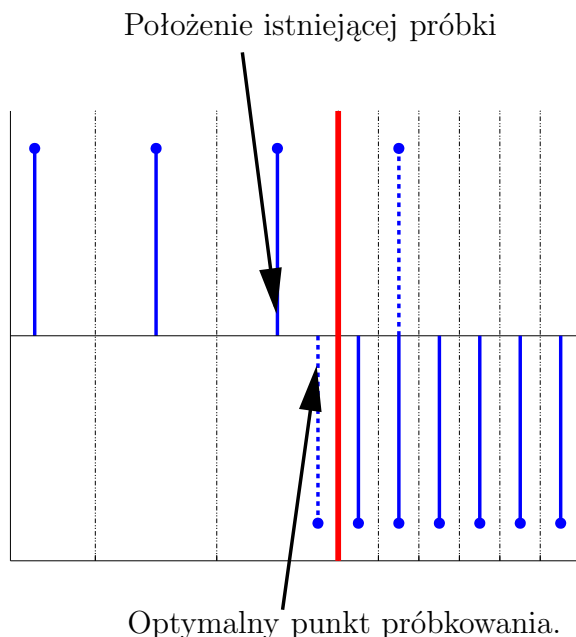
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{26} & & \\ & \mathbf{I}_{16} \otimes [{}^h\mathbf{u}^{0,3}] & \\ & & \mathbf{I}_{26} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

czyli po około 1/4 dziedziny z każdej strony pozostanie niezmodyfikowane, natomiast środek zostanie przepróbkowany w stosunku 3:1. Wykres pierwszego wektora własnego przedstawiono na rys. 3.12, natomiast kilka mniejszych wartości λ zebrano w tabeli 3.9. Jak widać, rozwiązania są mniej dokładne niż dla sformułowania różnicowego dla siatki nieregularnej. W kontekście subgriddingu wróży to znaczne odbicie na granicy poddziedzin. Aby dokładniej przeanalizować problem, konieczne jest przyjrzenie się budowie operatora drugiego rzędu, uzyskanymi w sposób (3.37) z użyciem macierzy (3.79). Interesujący fragment jest

macierzą trójdziagonalną postaci:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & \ddots & & & \\ \ddots & & \ddots & & & \\ & & & * & * & \\ & & & * & * & * \\ \hline & & & & * & * & * \\ & & & & * & * & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \\ \hline g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

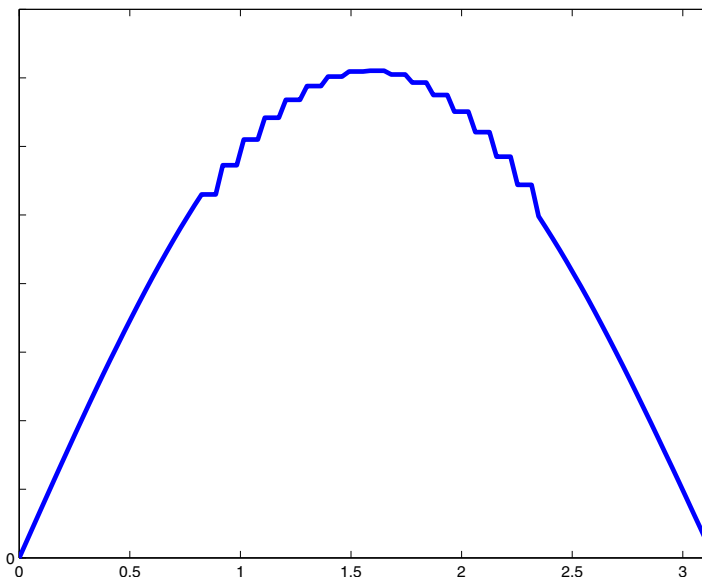
Jako f_m i g_m oznaczono odpowiednio współczynniki reprezentujące pola w obu dziedzinach. Konstrukcja (3.80) oznacza, że jako „brakujących” elementów każdej poddziedziny używa się próbek z dziedziny sąsiedniej, najbliższej granicy, jak to zaznaczono na rys. 3.11. Z kolei z punktu widzenia minimalizacji odbicia należałoby niekoniecznie najbliższy, element określony na siatce [16, 55]. Wynika z tego, że nie jest możliwe otrzymanie subgriddingu postaci [55] metodą projekcji poprzez łączenie schematu Haara i różnicowego. Zdefiniowany w formalizmie projekcji subgridding jest równoważny sformułowaniu [83].



RYSUNEK 3.11: Ilustracja graficzna do macierzy (3.80).

3.7.3 Inne algorytmy hybrydowe

Powyżej zaprezentowano sformułowania i ograniczenia projekcji dyskretnej w najprostszym ujęciu. Założono konstrukcję macierzy projekcyjnej w formie quasidiagonalnej, co gwarantuje niski koszt jej ortogonalizacji i łatwość podziału dziedziny na fragmenty opisane za pomocą różnych funkcji bazowych. Takie sformułowania będą wykorzystywane w obliczeniach elektrodynamicznych zaprezentowanych w następnym rozdziale. Przed demonstracją zaawansowanych przykładów warto jeszcze przedyskutować zasygnalizowany na początku problem łączenia dziedziny różnic skończonych z elementami skończonymi. Metoda



RYSUNEK 3.12: Wykres pierwszego wektora własnego przy próbkowaniu części dziedziny w stosunku 3:1. W tabeli 3.9 zaznaczono wartość kilku mniejszych wartości własnych.

TABELA 3.9: Wartości λ i błędy w ich określeniu dla subgriddingu 1:3. Porównano rozwiązania uzyskane metodą projekcji i w drodze bezpośredniej dyskretyzacji.

Projekcja		Bezpośrednia dyskretyzacja	
wartość	błąd [%]	wartość	błąd [%]
0.99963	-0.037238	0.99996	-0.0041958
1.9985	-0.076031	1.9997	-0.016782
2.9957	-0.14358	2.9989	-0.037758
3.9868	-0.32916	3.9973	-0.067120
4.9695	-0.61025	4.9948	-0.10486

Elementów Skończonych posłuży tu jako reprezentant metod siatkowych, gdzie dopuszcza się częściowe pokrywanie się funkcji bazowych (3.44a). Podobna sytuacja występuje w przypadku rozwinięć przy pomocy falek Battle-Lemarie czy Daubechies.

Niech dziedzina zagadnienia (3.60) podzielona będzie tak, że prawa część będzie rozwinięta z użyciem funkcji bazowych definiujących Metodę Elementów Skończonych,

$$T_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x_m - x_{m-1})}(x - x_{m-1}) & x_{m-1} < x < x_m \\ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})}(x - x_{m+1}) & x_m < x < x_{m+1} \\ 0 & \text{pozostałe } x \end{cases} \quad (3.81)$$

gdzie jako x_m oznaczono m -ty węzeł siatki głównej (rzadkiej). Jak pokazano w [27], dyskretyzacja Rayleigha-Ritza operatora drugiej pochodnej, na mocy faktu, że jest on samosprężony, jest równoważna dyskretyzacji sformułowania wariacyjnego, jakiego typowo używa się w metodzie elementów skończonych. Zatem rzutowanie (2.9) z wykorzystaniem

funkcji (3.81) daje taką samą macierz jak metoda Ritza zastosowana do odpowiedniego funkcjonału. Rozważony zostanie przykład łączenia dziedziny FD i FEM. Zakłada się, że dziedzina obliczeniowa została równomiernie podzielona na 10 przedziałów FEM i $N = 100$ oczek FD. Rzutowanie dyskretne przy pomocy próbek funkcji (3.81) daje wynik praktycznie (czyli z błędem równym precyzji maszynowej) równy otrzymanemu bezpośrednio w wyniku całkowania. Docelowo jednak część dziedziny ma być rozwinięta przy pomocy elementów Lagrange'a (3.81), część natomiast ma pozostać niezmienną albo, co jeszcze bardziej pożądane, zostać przepróbkowana np. w stosunku 1:2. Pierwszy problem jaki trzeba rozwiązać w takim przypadku to taki, że operator FEM otrzymuje się przez projekcję operatora drugiego rzędu, natomiast zmianę rozdzielczości siatki, jak pokazano w przykładzie (3.6) tylko rzutując operator rzędu pierwszego. Całkując przez części, zakładając zerowanie się funkcji (3.81) na brzegach dziedziny można rozbić problem rzędu drugiego na iloczyn pochodnych rzędu pierwszego

$$\int_0^{\pi} \mathbf{T}^m(x) \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{T}_n(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} \mathbf{T}_m(x) \frac{d}{dx} \mathbf{T}_n(x) dx \quad (3.82)$$

co bezpośrednio znajduje przełożenie na dziedzinę dyskretną,

$$\mathbf{V}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{V} = (\mathbf{D}\mathbf{V})^T (\mathbf{D}\mathbf{V}) \quad (3.83)$$

Wzór (3.83) jest równoważny projekcji (3.37), z jednostkową macierzą \mathbf{W} . Aby zrealizować postulowany podział dziedziny pomiędzy FEM i schemat Haara, należy zdefiniować następujące macierze projekcyjne:

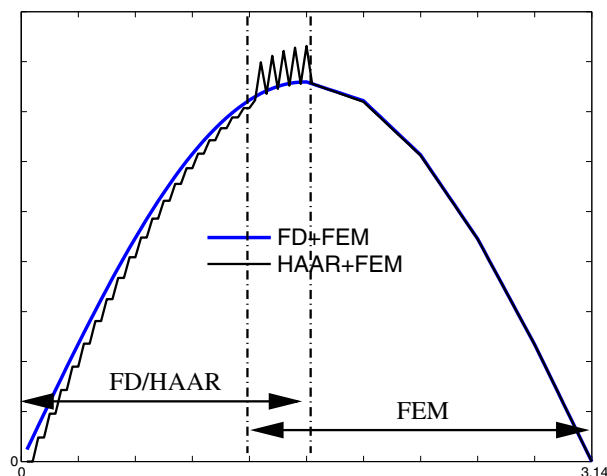
$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} \otimes [h\mathbf{u}^{0,2}] & \mathbf{f}\mathbf{V} \end{array} \right] \quad (3.84)$$

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} \otimes [h\mathbf{u}^{0,2}] & \\ \hline & \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (3.85)$$

gdzie jako $\mathbf{f}\mathbf{V}$ oznaczono wybrane wiersze macierzy zawierającej próbki (3.81). Nie podano rozmiaru macierzy $\mathbf{f}\mathbf{V}$ ani jednostkowej, gdyż jest to przedmiotem dyskusji w następnym akapicie.

Połączenie dziedziny FEM z FD metodą projekcji nie jest możliwe z użyciem quasidiagonalnych macierzy projekcyjnych. Zdefiniowanie odpowiedniej przestrzeni rozwiązań wymaga zachodzenia na siebie obu rozwinięć na obszarze równym krokowi siatki głównej, czyli w omawianym przypadku 1/10 długości dziedziny. Wynika z tego, że w macierzy (3.84) 50% dziedziny jest niezmodyfikowane, natomiast 60% pokrytych jest funkcjami (3.81). Oznacza to, że jedna komórka jest pokryta zarówno funkcjami (3.57) jak i (3.81). Oznacza to, że rozmiar macierzy \mathbf{I} , mnożonej tensorowo przez $h\mathbf{u}^{0,2}$ wynosi 24×24 w (3.84) i (3.85). Macierz $\mathbf{f}\mathbf{V}$ obejmuje natomiast próbki T^5 do T^{10} (3.81), czyli ma wymiar 100×6 . Wyniki symulacji z tak zdefiniowanymi macierzami projekcyjnymi przedstawiono w tabeli 3.10. Wykres pierwszego wektora własnego zamieszczono na rys. 3.13.

Przykład ten ilustruje potencjalne problemy, jakie można napotkać przy próbie łączenia dziedziny elementów skończonych z różnicami skończonymi metodą projekcji. Dodać należy, że w tym przypadku baza projekcyjna nie była ortogonalna, co wymagało rozwiązania uogólnionego problemu własnego. Dokładne przybliżenie macierzy FEM uzyskano dzięki regularności siatki FEM, a jak wiadomo taka należy do rzadkości w praktycznych zastosowaniach tej metody. W problemach elektrodynamicznych dodatkowym utrudnieniem jest



RYSUNEK 3.13: Wykres rozwiązania problemu metodą hybrydową FD-FEM, oraz HAAR+FEM. Zaznaczono podział dziedziny wraz z obszarem wspólnym dla obu rozwinięć.

FD+FEM	HAAR+FEM
0.1979	0.6397
0.7879	1.7901
1.6738	2.0408
3.0386	4.0250
4.0353	4.3610

TABELA 3.10: Błąd (w [%]) wartości λ problemu (3.61) wyznaczonych z użyciem algorytmu hybrydowego FEM z FD oraz falkami Haara.

fakt, że dla innej analizy niż elektrostatyczna, równania wyjściowe różnic skończonych (rotacja) różnią się od funkcjonalów zdyskretyzowanych metodą Ritza [37]. Operatory różnic skończonych przestają być wtedy elementem łączącym metody ciągłe i dyskretne.

3.8 Wektory bazowe dla wielowymiarowych operatorów

Do tej pory przedstawiono konstrukcję wektorów bazowych dla przypadku rzutowania problemu jednowymiarowego. Dla efektywnego zastosowania projekcji w analizie rzeczywistych struktur konieczne jest zdefiniowanie wektorów reprezentujących dwu i trójwymiarowe rozwinięcia w przestrzeni. Odpowiednie wektory zostaną zdefiniowane analogicznie do schematów falkowych [48]. Niech dana jest funkcja $u(x)$ która ma reprezentować pole na pewnym odcinku $x \in (x_0, x_1)$. Jej uogólnienie na większą liczbę wymiarów można

zdefiniować następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(y) \\ x &\in (x_0, x_1), y \in (y_0, y_1) \end{aligned} \quad (3.86)$$

lub

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{u}(z) \\ x &\in (x_0, x_1), y \in (y_0, y_1), z \in (z_0, z_1) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Wzory (3.86) i (3.87) opisują typowy przypadek, gdy tej samej funkcji macierzystej \mathbf{u} używa się do reprezentacji pól we wszystkich kierunkach. W ogólności można jednak funkcje te dla każdego kierunku zdefiniować niezależnie od siebie, jako ${}^x\mathbf{u}(x), {}^y\mathbf{u}(y)$ oraz ${}^z\mathbf{u}(z)$. Ponadto, zgodnie z filozofią schematów *multiresolution* w każdym obszarze może być zdefiniowane do kilku funkcji bazowych zamiast w miejsce pojedynczej funkcji \mathbf{u} . Analogiczne do (3.86) i (3.87) rozwinięcia można zdefiniować w przestrzeni węzłów siatki Yee. Elementy wektora bazowego w przestrzeni dyskretnej ${}^{x,y,z}\mathbf{u}$ można zapisać jako:

$$u_{n,m,l} = {}^x u_n \cdot {}^y u_m \cdot {}^z u_l. \quad (3.88)$$

W szczególności, wektory \mathbf{u} mogą być jednymi ze zdefiniowanych wcześniej: (3.57), (3.66), (3.69). Zapis $u_{i,j,k}$ należy rozumieć jako $u_{\text{IND}(n,m,l)}$ gdzie $\text{IND}(n, m, l)$ jest odwzorowaniem wiążącym indeks liniowy wektora z jego położeniem w siatce (1.5). Z dokładnością do permutacji (3.88) można zapisać jako

$${}^{x,y,z}\mathbf{u} = {}^x\mathbf{u} \otimes {}^y\mathbf{u} \otimes {}^z\mathbf{u} \quad (3.89)$$

Łatwo sprawdzić, że dla unormowanych wektorów ${}^?\mathbf{u}$ wektor wynikowy ${}^{?,?,?}\mathbf{u}$ ma także normę równą 1. Co więcej, jeśli podmacierz projekcyjna zbudowana w sposób (3.68) zostanie wykorzystana do wygenerowania wielowymiarowej bazy np.

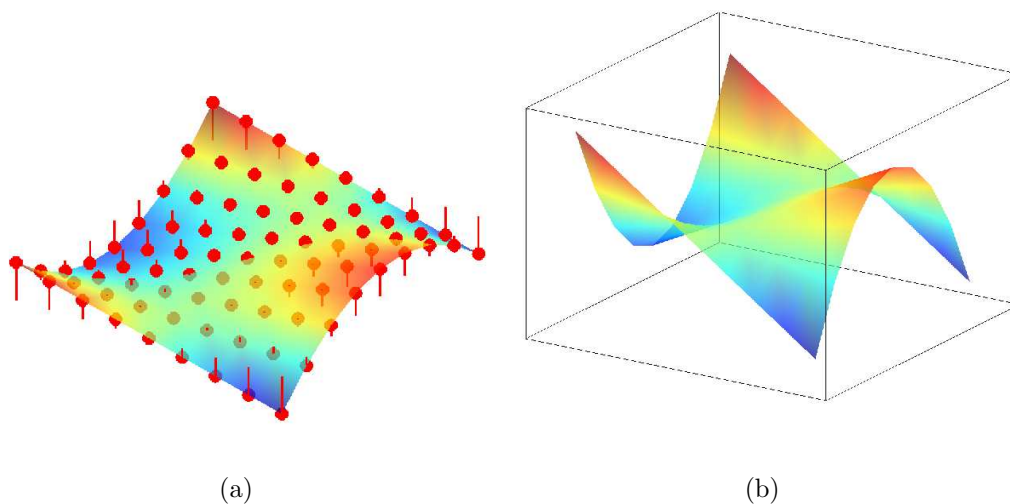
$$\mathbf{S} = {}^l\mathbf{S}^{?,?,?} \otimes {}^l\mathbf{S}^{?,?,?} \dots \quad (3.90)$$

to macierz \mathbf{S} (3.90) także będzie ortogonalna. Jest to bardzo istotna obserwacja, z punktu widzenia ogólności proponowanego sformułowania i możliwości jego implementacji w sposób maksymalnie zautomatyzowany.

Przykład 3.8 Poniżej zostanie zaprezentowana budowa dyskretnej, dwuwymiarowej falki Haara i jej zastosowanie do rozwiązania skalarnego równania Helmholtza, również w dwóch wymiarach. Falkę tę wybrano ze względu na prostą i przejrzystą postać macierzy projekcyjnych (por. (3.70) i (3.71)). Niech dana będzie macierz ${}^h\mathbf{S}^{1,4}$.

$${}^h\mathbf{S}^{1,4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Kolumny (3.91) definiują dwa wektory bazowe na nośniku równym 4 węzłom siatki tła.

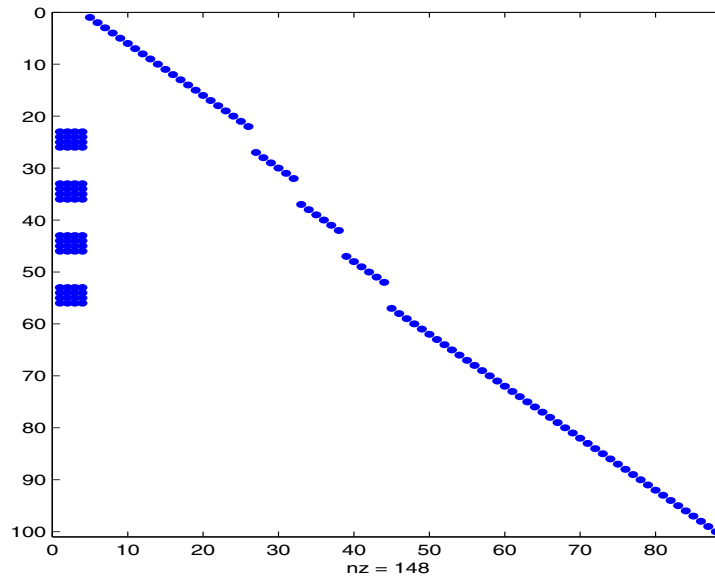


RYSUNEK 3.14: Przykładowy dwuwymiarowy wektor bazowy ${}^{l,l}\mathbf{u}^{8,1,8,2}$ - kształt funkcji w przestrzeni ciągłej (b) i sposób jego próbkowania w przestrzeni.

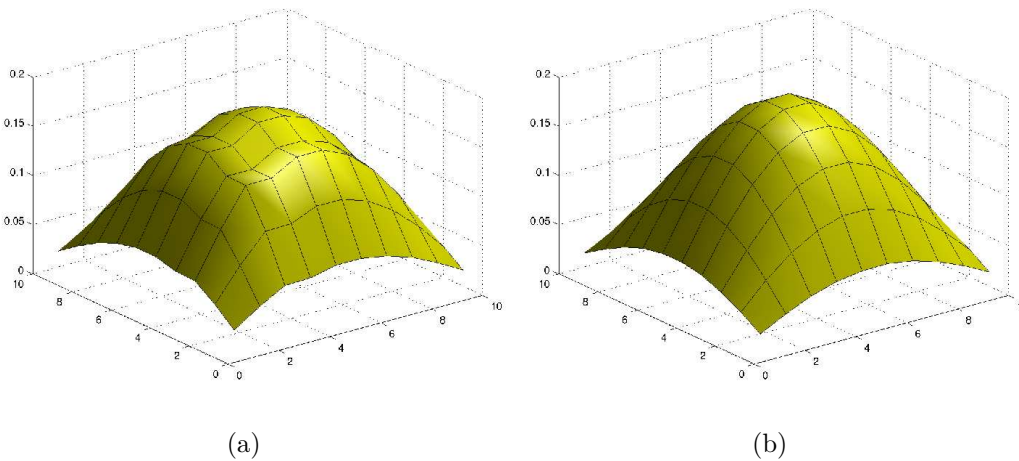
Zgodnie z postulatem (3.90), macierz bazowa dla dwóch wymiarów wygląda następująco:

$${}_{h,h}\mathbf{S}^{1,4,1,4} = {}_h\mathbf{S}^{1,4} \otimes {}_h\mathbf{S}^{1,4} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Poziomymi liniami oddzielono wiersze należące do kolejnych warstw w kierunku y (zakładając, że (3.91) definiowało próbki w kierunku x). Budując macierz projekcyjną dla całego problemu (w omawianym przypadku 10 na 10), konieczne jest odpowiednia permutacja wierszy (3.92). Wygląd finalnej macierzy projekcyjnej przedstawiono na rys. 3.15, natomiast wykresy rozwiązania problemu wyjściowego i rzutowanego widoczne są na rys. 3.16.



RYSUNEK 3.15: Widok macierzy projekcyjnej dla dwuwymiarowej siatki różnicowej 10 na 10 oczek. Pierwsze cztery kolumny zawierają odpowiednio spemutowaną macierz (3.92), pozostałe elementy mają wartość równą 1. Rzutowany jest obszar między 3 a 6 węzłem w obu kierunkach.



(a)

(b)

RYSUNEK 3.16: Wykres rozwiązania (pierwszego) skalarnego równania Helmholtza dla siatki 10 na 10 oczek macierzy projekcyjnej (rys. 3.15). Rzadka siatka uwypukla błąd spowodowany przez projekcję. Różnica w znalezionej częstotliwości rezonansowej między oboma rozwiązaniami wynosi około 11 %.

3.9 PEE - Szczególny przypadek projekcji wielowymiarowej

Technika częściowego rozwinięcia w funkcje własne (PEE) [19, 47, 68, 69, 71, 75] jest szeroko wykorzystywana zarówno w jednorodnych strukturach falowodowych jak i cylindrycznych. Wprowadzenie do techniki PEE dla przypadku ciągłego zostało zaprezentowane w podrozdziale 1.6.3. W tym miejscu zostanie rozważona projekcja dyskretna z użyciem

funkcji harmoniczych, która w rezultacie daje identyczny wynik jak zastosowanie techniki PEE dla problemu ciągłego.

Niech operator różnicowy reprezentujący pochodną pierwszego rzędu \mathbf{D} (1.23) ma rozmiar $N+1$ na N . W ten sposób operator rzędu drugiego, otrzymany jako $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$ jest macierzą Czebyszewa $N \times N$ [65]. Wektorami własnymi tej macierzy są wektory \mathbf{g}^m , których elementy wyraża zależność (z dokładnością do stałej a),

$$g_n^m = a \sin\left(\frac{mn\pi}{N+1}\right), \quad n, m = 1..N \quad (3.93)$$

Niech tak zdefiniowany wektor \mathbf{g}^m będzie argumentem \mathbf{D} , wtedy

$$\mathbf{f}^m = \mathbf{D}\mathbf{g}^m \quad (3.94)$$

Wektor wynikowy \mathbf{f}^m można zapisać w postaci jawnej, korzystając z definicji macierzy \mathbf{D} (1.23), jako

$$f_n^m = \frac{1}{\Delta x} (g_{n+1}^m - g_n^m) \quad (3.95)$$

Podstawiając (3.93) do (3.95) uzyskuje się (zakładając dla uproszczenia $a = \Delta x$)

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{(n+1)m\pi}{N+1}\right) - \sin\left(\frac{nm\pi}{N+1}\right) = \\ & 2 \cos\left(\frac{m\pi(2n-1)}{2(N+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \\ & \quad b \cos\left(\frac{m\pi(n+\frac{1}{2})}{N+1}\right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

gdzie

$$b = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \quad (3.97)$$

Oznacza to, że wektory \mathbf{f}^m (3.96) zawierają dokładnie próbki funkcji cosinus określone w węzłach siatki dualnej. Widać tu bezpośrednią relację między przypadkiem ciągłym i dyskretnym, gdyż obie funkcje są związane identyczną relacją w przestrzeni ciągłej. Aby podejście ciągłe i dyskretne w przypadku PEE można było traktować równoważnie, konieczne jest wykazanie, że wektory \mathbf{f}^m są do siebie ortogonalne. Wtedy bowiem, podobnie jak w przypadku ciągłym, projekcja operatora pierwszej pochodnej na bazę w postaci funkcji harmoniczych dają macierz diagonalną,

$$\mathbf{f}^{mT}\mathbf{D}\mathbf{g}^n = 0 \quad m \neq n \quad (3.98)$$

Innymi słowy, rozwiązania związane z różną zmiennością (wielkość m w (3.96)) mogą być rozseparowane.

Ortogonalność wektorów \mathbf{f}^m

Niech dana będzie macierz

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T \quad (3.99)$$

w przestrzeni ciągłej (por. roz. 1.6.3). Projekcja operatora rotacji daje w rezultacie identyczną macierz jak zastosowanie PEE z dokładnością do dyspersji numerycznej. W przypadku sformułowania ciągłego, rozwinięcie funkcyjne dokonywane jest przed dyskretyzacją, natomiast w omawianym przypadku po. Projekcja dyskretna nie eliminuje zatem dyspersji numerycznej w rozwijanym kierunku, co było cechą sformułowania ciągłego. Z drugiej strony, rozmiar siatki przed rzutowaniem w żaden sposób nie wpływa na wynikowy rozmiar problemu, można więc, planując dyskretne rozwinięcia funkcyjne, zdefiniować siatkę odpowiednio gęstsza. Celem definiowania metody PEE w przestrzeni dyskretnej jest łatwość tworzenia algorytmów hybrydowych, lokalnie wykorzystujących rozwinięcia harmoniczne.

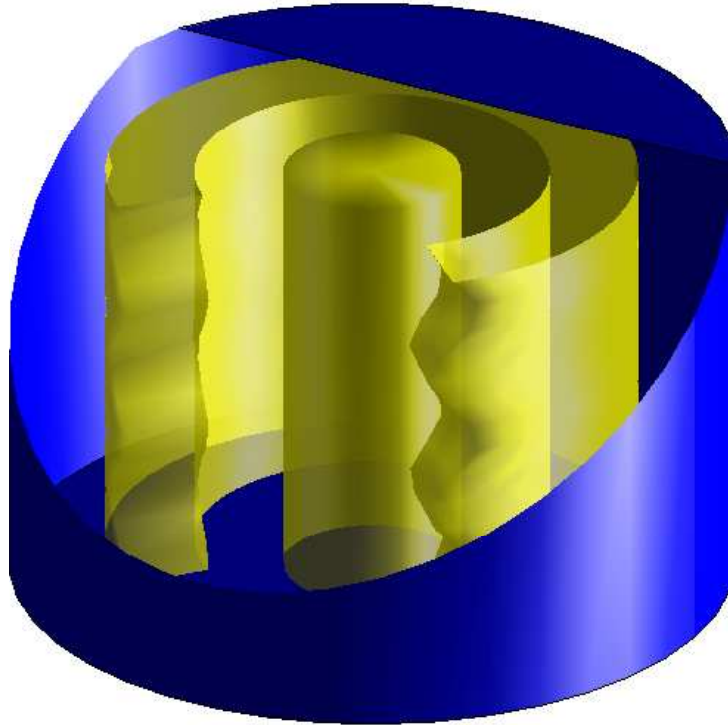
3.10 Wstęp do hybrydowej analizy wielowymiarowej

Do zalet Metody Różnic Skończonych należy możliwość analizy struktur o dowolnej geometrii oraz możliwość definiowania problemów o bardzo dużej liczbie zmiennych. Modyfikacje metody nie powinny negatywnie wpływać na żaden z tych elementów. Niniejszy podrozdział prezentuje zagadnienia związane z analizą trójwymiarową, takie jak wpływ projekcji na wydajność obliczeniową oraz istnienie rozwiązań pasożytniczych. Rozważony zostanie bardzo prosty przykład - analiza pustego rezonatora cylindrycznego o promieniu $15mm$ i wysokości $20mm$. Rozmiar siatki będzie równy $1mm$ w każdym kierunku, co odpowiada siatce 15 na 20 oczek w płaszczyźnie ρz . W kierunku osiowym zdefiniowano 30 oczek, stąd, ogólna liczba zmiennych opisujących strukturę wynosi około 35000. Wyniki analizy dla Metody Różnic Skończonych przedstawiono w tabeli 3.11. Częstotliwości rezonansowe znaleziono zarówno metodą czasową, jak i rozwiązując problem własny. Wartości odniesienia zostały skonfrontowane z testami wykorzystującymi rozwinięcia funkcyjne w następujących konfiguracjach:

1. Rozwinięcia harmoniczne w kierunku φ w całej dziedzinie, czyli problem równoważny PEE.
2. Rozwinięcia harmoniczne wzdłuż osi φ dla $\rho < \rho_0/2$, reszta dziedziny niezmodyfikowana.
3. Rozwinięcia harmoniczne wzdłuż osi φ dla $\rho < \rho_0/4$ i $\rho_0/2 < \rho < 3\rho_0/4$.
4. Uzupełnienie poprzedniego przykładu o rozwinięcia harmoniczne wzdłuż osi z , dla wewnętrznego obszaru.
5. Dodatkowe rozwinięcie zewnętrznego pierścienia z testu (3) w wielomiany Legendre'a wzdłuż osi z .

Parametry symulacji, takie jak wielkość macierzy i czas rozwiązania przedstawiono w tabeli 3.12. Analizując zebrane tam dane widać, że na szybkość symulacji wpływają trzy elementy - rozmiar macierzy, jej gęstość oraz norma. Widoczne jest to w szczególności dla ostatniej symulacji, z użyciem próbek wielomianów jako funkcji bazowych. W przeciwieństwie bowiem do funkcji harmonicznych, powodują one zagęszczanie macierzy (rys. 3.18). Częstotliwości rezonansowe uzyskane w symulacjach 1 do 4 są praktycznie identyczne, co jest związane z faktem użycia funkcji własnych do budowy podprzestrzeni projekcyjnej. Dopiero rozwinięcia wielomianowe, które nie oddają bezpośrednio rozkładu pola, powodują

zmiany w uzyskanym wyniku. Warto zwrócić uwagę na fakt, że choć zastosowane rozwinięcia harmoniczne równoważne są ciągłej metodzie PEE, to jednak rzutowanie w przestrzeni dyskretnej pociąga za sobą istnienie dyspersji numerycznej w rozwijanych kierunkach. Zatem w symulacji 2, gdzie uzyskuje się problem dwuwymiarowy, liczba oczek zdefiniowanych w kierunku φ wpływa na dokładność rozwiązania, podobnie jak gęstość siatki tła np. w przykładzie 3.2.



RYSUNEK 3.17: Podział dziedziny w analizie 4 i 5. Kolorem zaznaczono modyfikowane obszary.

TABELA 3.11: Wartości częstotliwości rezonansowych rezonatora cylindrycznego (w GHz) - wyniki analiz FDTD, FDFD oraz wartość dokładna.

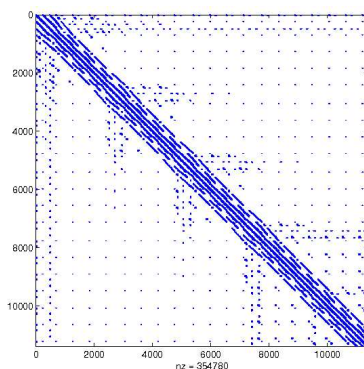
mod	Wartość dokładna	3D FDFD	3D FDTD
$TE_{1,0,1}$	14.318	14.286	14.287
$TE_{1,1,1}$	9.5183	9.508	9.508
$TE_{1,2,1}$	12.279	12.231	12.231
$TM_{1,0,0}$	7.6681	7.645	7.645
$TM_{1,1,0}$	12.197	12.170	12.17
$TM_{1,0,1}$	10.726	10.704	10.703

TABELA 3.12: Parametry symulacji bez rzutowania oraz z rzutowaniem. Liczba elementów niezerowych operatora zaznaczona zarówno dla operatora pierwszego (nz1) jak i drugiego rzędu (nz2). Zaznaczono czas rozwiązania problemu własnego algorytmem Jacobiego-Davidsona (JDCG)

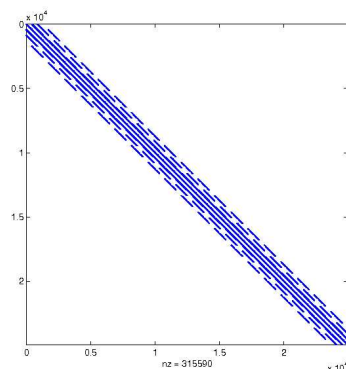
	FD	Analizy hybrydowe				
		1	2	3	4	5
rozmiar	25K	1700	12.5K	12.5K	11.7K	11.3K
nz1	100K	5K	51K	57K	57K	63K
nz2	315K	12K	160K	217K	213K	350K
norma macierzy	3.3e25	9.0e23	9e23	9.1e23	9.12e23	9.15e23
Δt	3.14-13	1.87-12	1.9-12	1.88-12	1.88-12	1.89-12
JDCG	60s	1.2s	12s	10s	10s	13s
MV	3000	600	700	700	750	1200
it /s	700	25000	2000	1600	1800	1630

TABELA 3.13: Porównanie błędów (w procentach) w określeniu wybranych częstotliwości własnych dla symulacji z użyciem różnych rozwinięć funkcyjnych.

Wartość dokładna	FD	sym. 1	sym. 2	sym. 3	sym. 4	sym. 5
7.6681	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
9.5183	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.08
10.726	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	2.3



(a)



(b)

RYSUNEK 3.18: Macierze (operatora drugiego rzędu) z symulacji 5 (a) oraz niezmodyfikowana macierz różnicowa (b).

3.10.1 Rozwiązania pasożytnicze

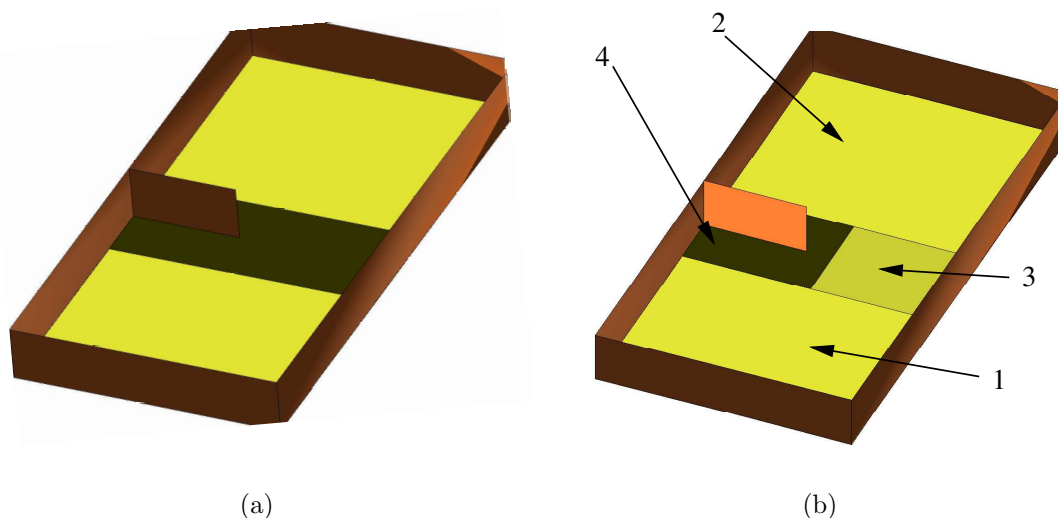
Istotną kwestią przy definiowaniu nowych funkcji bazowych dla operatorów ciągłych jest możliwość istnienia rozwiązań pasożytniczych [9, 16, 48, 96]. Wymaga to zdefiniowania dodatkowych kryteriów pozwalających rozróżnić rozwiązania fizyczne od pasożytniczych. Kryterium tym może być np. warunek zerowej dywergencji [9]. W przypadku algorytmów

hybrydowych sytuacja jest bardziej złożona. Przykładowo, w symulacji oznaczonej jako trzecia, podprzestrzeń rozwiązań została tak dobrana, że w wewnętrznej części dziedziny mogą istnieć wyłącznie pola o zmienności kątowej 0 i 1. Wyższe mody wzbudzone w zewnętrznym obszarze będą zwarte na granicy poddziedzin, co spowoduje istnienie dodatkowych rezonansów z tym związanych. Inna jest zatem natura takiego rezonansu. Rozwiązań pasożytniczych tego typu można uniknąć zapobiegając ich wzbudzeniu. W dziedzinie czasu oznacza to pobudzenie w obszarze najbardziej restrykcyjnie ograniczającym przestrzeń rozwiązań, w omawianym przypadku w rozwiniętym obszarze. W dziedzinie częstotliwości, rozwiązując problem własny należy natomiast tak dobrać wektory startowe, aby pola w wybranych podobszarach były równe zeru. Tym sposobem udało się zlikwidować mody pasożytnicze pojawiające się w symulacji 5.

Rozdział 4

Analiza wybranych struktur mikrofalowych

W poprzednim rozdziale zaprezentowano idee tworzenia algorytmów hybrydowych na bazie sformułowania operatorowego Metody Różnic Skończonych. Zaprezentowane przykłady ograniczały się do najprostszyc problemów i miały na celu jedynie ilustrację koncepcji dyskretnej projekcji. W niniejszym rozdziale zaprezentowane są przykłady analiz struktur mikrofalowych pokazujące możliwości zastosowania zaprezentowanych wcześniej algorytmów. Rozdział rozpoczyna omówienie prostych analiz dwuwymiarowych, takich struktur jak rezonator z metalowym ostrzem [85] oraz filtr falowodowy obciążony wkładkami dielektrycznymi [59]. W kolejnej odsłonie zaprezentowana jest analiza rezonatorów, zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości [5, 61]. Symulacje są przeprowadzane zarówno w układzie kartezjańskim jak i cylindrycznym. Dla tego ostatniego uzyskano szczególnie ciekawe rezultaty [115]. W części ostatniej dyskutowane będą struktury zawierające linie spiralne. Analiza tego typu układów była bowiem ważnym elementem prac prowadzonych przez autora [86, 87]. W niniejszym rozdziale zostanie także wyznaczony błąd związany z odbiciem na granicy siatek Haara/Legendre'a i różnicowej.



RYSUNEK 4.1: Rezonator z cieniłą metalowłą przegrodą. Ogólmy widok struktury. Jasnym kolorem wyróżniono modyfikowane obszary.

4.1 Analizy w dziedzinie częstotliwości

4.1.1 Analiza rezonatora z cienką przegrodą metalową

Pierwszym zaprezentowanym przykładem jest analiza rezonatora z cienką przegrodą metalową [84]. Szkic struktury widoczny jest na rysunku 4.1. Istnienie metalowej, teoretycznie nieskończonej cienkiej przegrody powoduje, że dla niektórych rodzajów występuje na jej końcu osobliwość pola, widoczna na wykresie rozkładu pola na rys. 4.2, co negatywnie wpływa na dokładność aproksymacji różnicowej. Z tego powodu, aby uzyskać zadowalającą precyzję rozwiązania minimalizując jednocześnie koszt numeryczny konieczne jest zastosowanie algorytmów aproksymacyjnych [9, 85] lub makromodeli [53]. W zaprezentowanym poniżej przykładzie wzrost wydajności w stosunku do pierwotnego sformułowania FDFD dla gęstej siatki uzyskano dzięki zastosowaniu schematu hybrydowego, który redukuje liczbę zmiennych w obszarach jednorodnych struktury. Sformułowanie różnicowe zostało zamienione na falkowe (3.57) lub oparte na rozwinięciu pola w funkcje wielomianowe (3.69). Kształt struktury sugeruje także możliwość użycia rozwinięcia obszarów w funkcje harmoniczne, czyli możliwość zdefiniowania hybrydowej metody PEE-FDFD [113].

Rezonator o wymiarach $5mm$ na $6mm$ został podzielony siatką 160 na 192, co odpowiada rozmiarowi oczka $\Delta x = \Delta y = 31.25\mu m$. Metalowa przegroda, znajdująca się w połowie dłuższego boku ma długość $2mm$, czyli 64 węzły siatki. Problem wyjściowy opisuje zatem prawie 500 tysięcy zmiennych. Symulację struktury przeprowadzono w dziedzinie częstotliwości. Problem własny rozwiązano solverem JDCG [4], bazującym na technice Jacobiego-Davidsona. Dla potrzeb dyskretnej projekcji dziedzina obliczeniowa została podzielona na 4 podobszary, widoczne na rysunkach 4.1 (a) i (b). Są one określone w następujący sposób:

- Obszar 1: $y < 86\Delta y$.
- Obszar 2: $y > 110\Delta y$.
- Obszar 3: $86\Delta y \leq y \leq 110\Delta y$ i $x > 80\Delta x$.
- Obszar 4: reszta dziedziny (w tym ostrze).

W ten sposób ostrze zostało otoczone obszarem pokrytym siatką Yee, wielkości około 10 oczek w każdą stronę. Wykonano 8 testów, modyfikując obszary 1-3 w sposób przedstawiony w tabeli 4.1. Wyniki wszystkich symulacji, a także podstawowe parametry, takie jak czas rozwiązania i rozmiar problemu zestawiono w tabeli 4.2. Porównano w niej otrzymane różnymi metodami częstotliwości rezonansowe rodzajów, zachowując nazewnictwo [85], TE_{e1} oraz TM_{e1} , czyli tych dla których występuje osobliwość pola i jednocześnie wyniki symulacji są najmniej dokładne. Warto porównać wyniki uzyskane w testach III i IV oraz V i VI. W pierwszej parze testów zastosowano w nich strefę buforową równą 6 oczkom siatki tła między obszarem rozwijanym w funkcje a metalowym brzegiem. Istnienie takiego obszaru wydaje się celowe, ze względu na zniekształcenia wprowadzane przez użyte funkcje bazowe przy brzegach dziedziny, co było między innymi treścią przykładu 3.6. Podobną strefę buforową zastosowano definiując algorytm hybrydowy FDTD-MRTD [97]. Wyniki wspomnianych symulacji, porównane z wynikami V i VI wskazują, że wspomniana strefa buforowa nie poprawia dokładności. Jest to związane z faktem, że stosunek gęstości siatki tła do rozmiaru funkcji bazowej jest na tyle mały, że wprowadzany w ten sposób błąd jest pomijalny. Co więcej, charakter tego błędu (wirtualne zmniejszenie dziedziny, por.

podrozdział 3.7.1) pozwala w tym przypadku częściowo kompensować dyspersję schematu różnicowego.

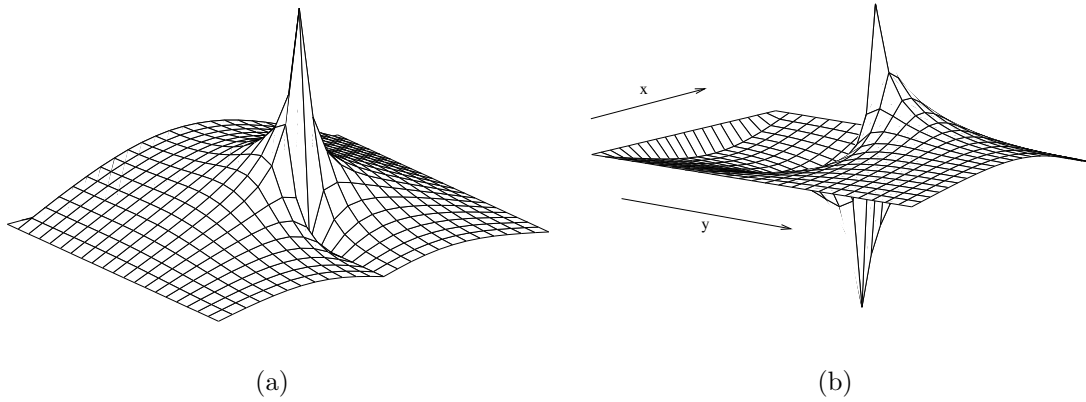
Warto wspomnieć, że bardzo podobny przykład jest zaprezentowany w artykule [97] omawiającym sposób tworzenia algorytmu hybrydowego FDTD-MRTD. We wspomnianej pracy uproszczono jednak problem przez założenie grubej przesłony, powodującej mniejsze zaburzenie pola. Podobny też przykład rozważony jest w pracy [82], gdzie dyskutowana jest niska dokładność schematów falkowych w tego typu strukturach.

TABELA 4.1: Sposób modyfikacji dziedziny w różnych analizach rezonatora (4.1). Obszar 4, nie był modyfikowany w żadnej z symulacji.

Nr analizy	obszar	Zastosowane rozwinięcia
I	1-4	Niezmodyfikowana siatka Yee
II	1-3	Rozwinięcia wielomianowe $P_x, P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku x i y , z pozostawioną niezmodyfikowaną siatką Yee (6 oczek) przy brzegach dziedziny
III	1-3	Dyskretne falki Haara $P_x, P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku x i y z pozostawioną niezmodyfikowaną siatką Yee (6 oczek) przy brzegach dziedziny
IV	1-3	Rozwinięcia wielomianowe $P_x, P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku x i y
V	1-3	Dyskretne falki Haara $P_x, P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku x i y
VI	1	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$, dodatkowo rozwinięcia wielomianowe $P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku y
	2	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$, dodatkowo rozwinięcia wielomianowe $P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku y
	3	Niezmodyfikowana siatka Yee
VII	1	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$, dodatkowo rozwinięcia wielomianowe $P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku y
	2	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$, dodatkowo rozwinięcia wielomianowe $P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku y
	3	Rozwinięcia wielomianowe $P_x, P_y = 6$ rzędu 1 w kierunku x i y
VIII	1	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$
	2	Zdyskretyzowane funkcje harmoniczne $n = 0..2$
	3	Niezmodyfikowana siatka Yee

4.1.2 Filtr falowodowy z elementami dielektrycznymi

Jako drugi przykład przedyskutowana jest analiza filtru falowodowego obciążonego periodycznie rozmieszczonymi cylindrycznymi prętami dielektrycznymi. Widok struktury przedstawiono na rys. 4.3. Została ona zaprezentowana w [59], gdzie przedstawiono wyniki analizy metodą dopasowania rodzajów oraz dane pomiarowe. Kołki dielektryczne o średnicy $4mm$ i przenikalności względnej $\epsilon_r = 14.8$ zostały rozmieszczone parami, symetrycznie



RYSUNEK 4.2: Wykres składowej E_x (z lewej) i E_y (z prawej) pola elektrycznego dla pierwszego z rezonansów.

TABELA 4.2: Częstotliwości rezonansowe rodzajów TE_{e1} oraz TM_{e1} uzyskane w symulacjach I - VIII. Jako wartości odniesienia przyjęto częstotliwości ekstrapolowane w [84], równe 19.6686 i 46.6693 GHz

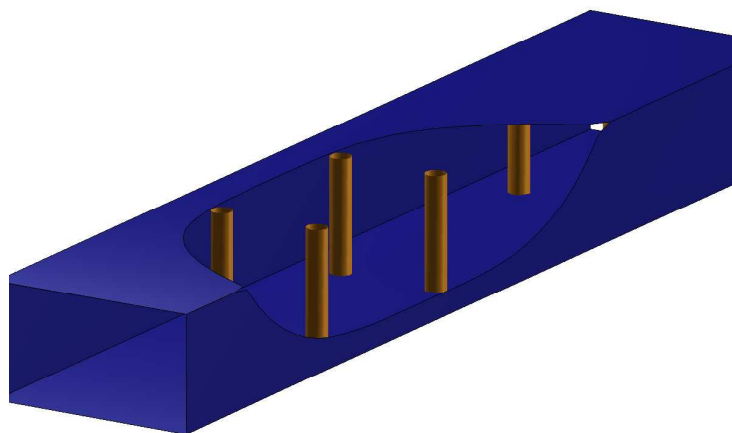
symulacja		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
TE_{e1}	f [GHz]	19.621	19.622	20.124	19.622	20.109	19.741	19.752	19.753
	Błąd [%]	-0.242	-0.237	2.315	-0.237	2.239	0.368	0.424	0.429
TM_{e1}	f [GHz]	46.746	46.739	46.179	46.737	46.411	46.501	46.482	46.482
	Błąd [%]	0.164	0.149	-1.051	0.145	-0.553	-0.361	-0.401	-0.401
Liczba zmiennych		91329	22944	22944	14832	14832	12358	7024	10621
Czas rozwiązania [s]		260	60.7	60	41	39	41	24	34

względem osi podłużnej falowodu. Odległość między nimi wynosi 15.7mm w kierunku poprzecznym i 7.8mm wzdłuż kierunku propagacji. Całość zamknięta jest w falowodzie WR90 o boku 22.86mm . Jednorodność struktury w pionie i pobudzenie rodzajem podstawowym pozwala na uproszczenie analizy do skalarnego równania Helmholtza. Symulacje przeprowadzono w dziedzinie częstotliwości. Dziedzinę obliczeniową wstępnie podzielono siatką różnicową 100×500 komórek. Następnie, metodą projekcji większość obszarów jednorodnych zmodyfikowano tak, że pole w nich wyrażone było przy pomocy próbek falek Haara bądź wielomianów Legendre'a. We wszystkich przypadkach modyfikowane były fragmenty o rozmiarze 4 na 4 oczka siatki Yee. Niezmodyfikowana Metoda Różnic Skończonych była zastosowana do obszarów o wielkości 32 na 32 oczka, zawierających elementy dielektryczne oraz ich najbliższe otoczenie (średnica pojedynczego pręta, w przeliczeniu na rozmiar siatki, równa jest w przybliżeniu 17 węzłów). Dodatkowo, w kilku przekrojach najbliższych płaszczyzn portów zastosowano dyskretną wersję PEE, dzięki czemu uzyskano bezpośrednią relację między wartością zmiennej a amplitudą wybranego rodzaju. Tak zmodyfikowany problem, był rozwiązany metodą bezpośrednią w dziedzinie częstotliwości. W tabeli 4.3 przedstawiono parametry symulacji. Wykonano 3 analizy, w których użyto wielomianów stopnia 1 a także falek Haara stopnia 0 i 1. Przy przyjętym rozmiarze funkcji równym czterem oczkom siatki tła w obu kierunkach oznaczało to zastąpienie każdego 16 zmiennych czterema, natomiast w ostatnim przypadku zastosowania falki Haara tyl-

TABELA 4.3: Parametry symulacji filtra falowodowego z wkładkami dielektrycznymi. Porównano analizę FDFD z metodami hybrydowymi. W kolejnych symulacjach użyto odpowiednio falek Haara $P = 4$ stopnia 1 (HAAR1) i stopnia 0 (HAAR0) oraz wielomianów Legendre'a (POLY). Czas rozwiązania podano dla jednego punktu częstotliwości.

Analiza	FDFD	HAAR1	HAAR0	POLY
Rozmiar macierzy	41515	15379	8845	15379
El. niezerowe	208K	160K	46.8K	210K
Czas rozw. [s]	4.0	2.0	0.38	1.88
Wzg. przyspieszenie	1	2	10.5	2.12
Odbicie od pustej siatki [dB]	-65	-31	-22	-65

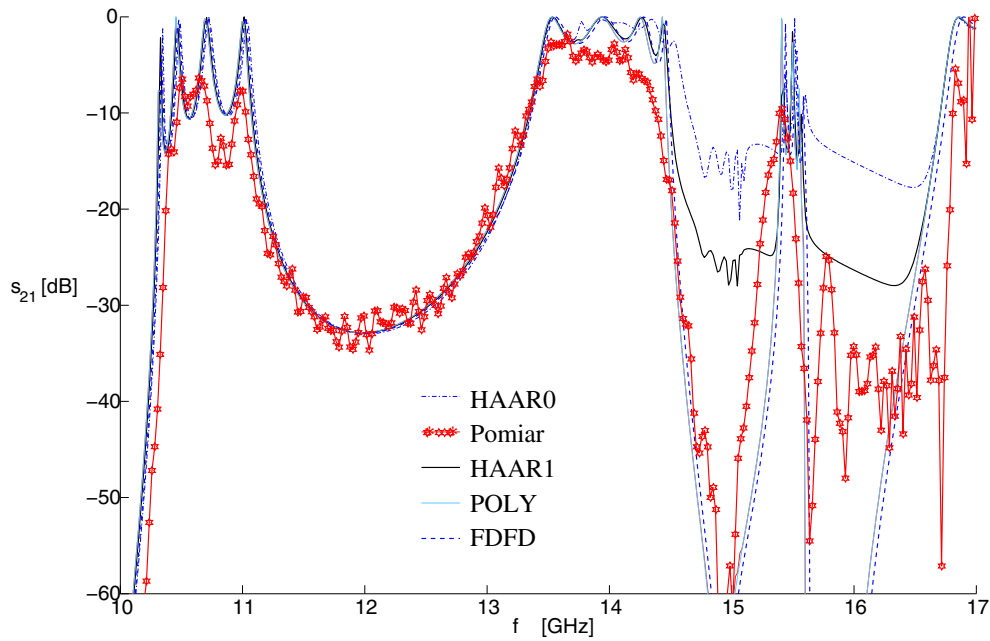
ko rzędu zerowego - jedną. Na wykresie 4.4 wykreślono charakterystykę częstotliwościową badanego układu. Jak widać, wszystkie wyniki są zbliżone, czyli każda z symulacji daje zadowalającą dokładność. Konfrontując czasy symulacji z tabeli 4.3 z charakterystyką częstotliwościową widać, że praktycznie bez utraty dokładności można obliczenia przyspieszyć dwukrotnie. Obniżając nieco dokładność, można otrzymać wyniki nawet 10 razy szybciej. Na uwagę zasługuje część charakterystyki w okolicach 15 i 16 GHz. Wyraźnie widać tam zmniejszenie dynamiki spowodowane odbiciami na granicy dziedzin. Aby ocenić poziom tych odbić powtórzone testy w pustej strukturze. Szacunkowe wyniki w postaci współczynnika odbicia przedstawiono w ostatnim wierszu tabeli 4.3. Zgodnie ze wcześniejszymi przypuszczeniami występuje duże odbicie na granicy schematu Haara i FD. Jednocześnie zastosowanie wielomianów Legendre'a daje odbicie na poziomie dopasowania osiąganego w portach układu.



RYSUNEK 4.3: Wygląd analizowanej struktury: filtr falowodowy z elementami dielektrycznymi.

4.2 Analiza rezonatorów w dziedzinie częstotliwości w siatce cylindrycznej

W kolejnym rozdziale przedstawione są przykłady trójwymiarowej analizy w dziedzinie częstotliwości. Do testów wybrano rezonatory dwurodzajowe opisane w [5, 61]. Ich analizę



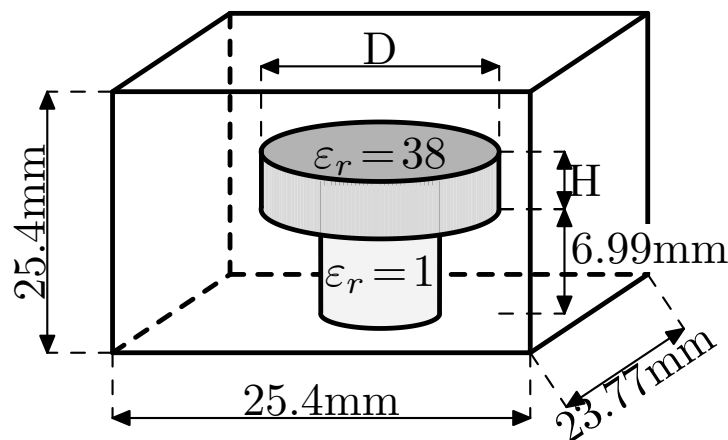
RYSUNEK 4.4: Charakterystyka filtru z periodycznie rozmieszczonymi elementami dielektrycznymi.

metodą różnic skończonych przedstawiono w [115].

4.2.1 Dwurodzajowy rezonator dielektryczny

Pierwszą z wybranych struktur jest rezonator w postaci prostokątnej wnęki metalowej obciążonej pastylką dielektryczną o dużej przenikalności względnej [61]. Przykłady analizy tego rezonatora dość często można spotkać w literaturze. Oprócz omówionej poniżej analizy FDFD [115] i metody dopasowania rodzajów [61], inni autorzy proponują analizę FDTD w siatce prostokątnej [39], oraz metodą momentów [67]. Ponadto w pierwotnej publikacji [61] przytoczone są wyniki pomiarów. Szkic struktury przedstawiony jest na rys. 4.5. Testy wykonano dla trzech wkładek dielektrycznych oznaczonych jako A, B i C, różniących się wielkością. Ich wymiary zebrane są w tabeli 4.4.

Analiza tej struktury w układzie cylindrycznym wydaje się celowa, gdyż można spodziewać się, że energia będzie skupiona w rejonie dielektryka i nawet gorszej jakości aproksymacja metalowych ścianek zapewni wystarczającą dokładność. Przypuszczenia te potwierdzają obliczenia zaprezentowane w [61], gdzie porównano częstotliwość rezonansową omawianej struktury z rezonatorem w okrągłej puszcze zamiast prostokątnej, obciążonego tym samym dielektrykiem. W omówionych poniżej symulacjach do aproksymacji metalowych ścianek użyto algorytmu bazującego na zaproponowanym w [24], zmodyfikowanego odpowiednio dla siatki cylindrycznej. Siatka Yee zdefiniowana dla opisywanej struktury miała rozmiar $31 \times 40 \times 25$ komórek, odpowiednio w kierunkach ρ , φ i z . Daje to rozmiar komórki $\Delta\rho = 0.81\text{mm}$ i $\Delta z = 1.016\text{mm}$ w płaszczyźnie ρz i $\Delta\varphi = \pi/15.5$ w kierunku φ . Schematyczny wygląd siatki, wraz z zaznaczonym obszarem rozwinięcia widoczny jest na rys. 4.6. Widać, że znaczna część węzłów znajduje się poza dziedziną, przez co efektywny



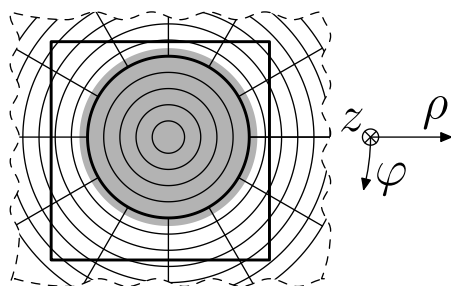
RYSUNEK 4.5: Widok prostokątnej wnęki rezonansowej z wkładką dielektryczną. Wymiary D i H dla różnych dielektryków zebrane są w tabeli 4.4.

rozmiar problemu jest znacznie mniejszy niż by to wynikało z definicji siatki. Aby ocenić jakość aproksymacji przewodnika, znaleziono częstotliwości rezonansowe pustej wnęki metalowej. Zastosowano siatkę taką jak dla wszystkich symulacji. W tabeli 4.5 zamieszczono wyniki tej symulacji porównane z wartościami dokładnymi. Uzyskana dokładność na poziomie 1-2% jest wystarczająca do planowanego testu.

TABELA 4.4: Rozmiary wkładki dielektrycznej zastosowanej w różnych analizach

Oznaczenie struktury	A	B	C
Średnica D [mm]	16.61	17.5	19.22
Wysokość H [mm]	5.53	5.84	6.42

Z dziedziny obliczeniowej wydzielono obszar $\rho \leq 10\Delta\rho$, który zmodyfikowano z użyciem funkcji harmoniczych. Uzyskano w ten sposób algorytm hybrydowy PEE-FDFD. W obszarze PEE użyto trzech funkcji bazowych. Parametry symulacji dielektryka A zamieszczono w tabeli 4.6. Parametry symulacji pozostałych dielektryków różnią się w minimalnym stopniu. Wyniki dla wszystkich trzech dielektryków zamieszczono w tabeli 4.7. Trzeba zaznaczyć, że choć badana struktura jest dwurodzajowa, to jednak w literaturze podana jest tylko jedna wartość częstotliwości dla każdego dielektryka. W tabeli 4.6 podano obie wartości z tym, że ze względu na brak odniesienia nie określono błędu dla drugiego z rezonansów.



RYSUNEK 4.6: Prostokątna wnęki rezonansowa umieszczona w siatce cylindrycznej - szkic struktury z zacienionym obszarem PEE.

Zastosowanie metody hybrydowej przyniosło około 50% redukcję rozmiaru problemu i zredukowało czas rozwiązania o ponad 90%. O efektywności rozwiązania hybrydowego

przesądziła redukcja normy macierzy. W klasycznym schemacie różnic skończonych komórki Yee małych rozmiarów wpływają na znaczną normę macierzy, co radykalnie pogarsza zbieżność metod iteracyjnych używanych do rozwiązania problemu własnego. Zastosowanie rozwinięć funkcyjnych w środkowym obszarze pozwala ten problem rozwiązać, przynajmniej w strukturach osiowo symetrycznych w pobliżu osi układu [22, 75].

TABELA 4.5: Porównanie częstotliwości własnych rezonatora prostokątnego 25.4 na 25.4 na 23.8mm, wyznaczonych metodą FDFD w cylindrycznym układzie współrzędnych dla siatki $31 \times 40 \times 25$ komórek.

Wartość dokładna [GHz]	FDFD [GHz]	Błąd [%]
8.351	8.337	-0.168
8.722	8.475	-2.832
8.722	8.523	-2.282
10.533	10.336	-1.870
10.533	10.367	-1.576
13.205	13.272	0.507
13.442	13.413	-0.216

TABELA 4.6: Parametry symulacji struktury z rys. (4.5) - dla wkładki oznaczonej w tabeli (4.4) jako A

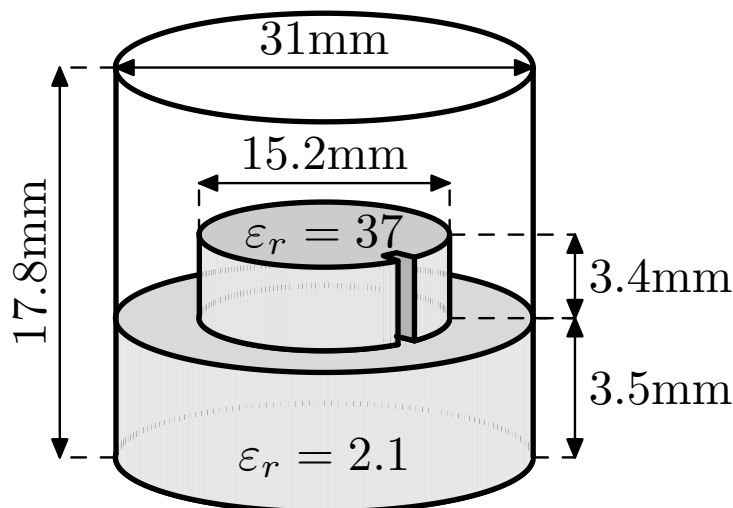
	3D	PEE-FDFD
Częstotliwość [GHz]	4.38	4.38
Błąd wzg.	0.02%	0.02%
Rozmiar macierzy	62003	34993
Czas [s]	336.44	32.24

TABELA 4.7: Zbiorcze porównanie wyników, dla wszystkich konfiguracji

Dielektryk	A		B		C	
	f [GHz]	błąd [%]	f [GHz]	błąd [%]	f [GHz]	błąd [%]
Pomiar [61]	4.382	-	4.153	-	3.777	-
MM [61]	4.388	0.14	4.16	0.18	3.721	1.48
FDTD [39]	4.40	0.41	4.17	0.41	3.78	0.07
MoM [67]	4.391	0.21	4.168	0.36	3.762	0.4
Niniejsza praca	4.384	0.03	4.144	0.19	3.779	0.02
	4.391		4.17		3.786	

4.2.2 Dwurodzajowy rezonator cylindryczny o zakłóconej symetrii osiowej

Drugim przykładem analizy rezonatora w dziedzinie częstotliwości jest dwurodzajowy rezonator cylindryczny zaproponowany w [6] i wykorzystany jako element większego systemu w [5]. Szkic struktury przedstawiono na rys. 4.7. Jak widać w pastylce dielektrycznej o dużej przenikalności względnej $\epsilon_r = 20$, znajduje się niewielkie wcięcie o wymiarach 1mm na 1mm . Powoduje ono zaburzenie częstotliwości rezonansowej rodzajów, które byłyby zdegenerowane w osiowo symetrycznej strukturze.



RYSUNEK 4.7: Widok cylindrycznego rezonatora dwurodzajowego o zakłóconej symetrii obrotowej [5].

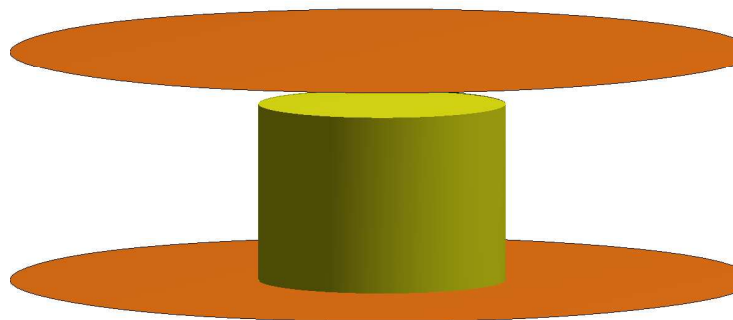
Wcięcie w pastylce dielektrycznej, stanowi około $1/47$ jej obwodu co determinuje minimalną liczbę węzłów w kierunku osiowym. W analizowanym przykładzie użyto siatki o 120 oczkach w tym kierunku, oraz po 50 w kierunkach ρ i φ . Przy tak gęstym podziale dziedziny w kierunku φ , norma macierzy problemu jest bardzo duża, co radykalnie obniża zbieżność użytego algorytmu do wyznaczania wartości własnych. Podstawowym zatem zadaniem projekcji jest przede wszystkim taka zmiana środka układu, aby poprawić zbieżność solvera poprzez redukcję normy macierzy. Jak wiadomo, rozwinięcia typu PEE nadają się do tego celu [75]. Rozwinięcie takie zastosowano w większości objętości dziedziny, tj. wszędzie z wyjątkiem pierścienia $13\text{mm} < \rho < 16\text{mm}$ i $3\text{mm} < z < 8\text{mm}$ czyli, odpowiednio przeliczając na oczka siatki, $13\Delta\rho < \rho < 16\Delta\rho$ i $6\Delta z < z < 17\Delta z$. Do rozwinięcia użyto 3 i 5 funkcji bazowych, co pozwala analizować rodzaje o zmienności kątovej 0 i 1 w pierwszym przypadku 0 do 2 w drugim. Wyniki trzech symulacji pokazano w tabeli 4.8. Jako częstotliwości odniesienia przyjęto wyniki pełnej trójwymiarowej symulacji z uwagi na fakt, że rezultaty podane w [5] znane są z dokładnością jedynie do 2 miejsc po przecinku. Wynoszą one odpowiednio 5.45 i 5.48GHz. Pierwotny cel, jakim było ograniczenie normy macierzy został osiągnięty - norma macierzy dzięki zastosowaniu analizy hybrydowej zmalała ponad stukrotnie. Dodatkowo zastosowanie rozwinięć w osiowo symetrycznych rejonach struktury, czyli w praktyce w 90% objętości, pozwoliło jednocześnie zmniejszyć liczbę zmiennych wyjściowego problemu kilkunastokrotnie. W sumie, zastosowanie hybrydowej metody PEE w miejsce FDTD dało przyspieszenie prawie 100-krotne (tab. 4.15).

TABELA 4.8: Wyniki analizy dwurodzajowego rezonatora cylindrycznego w dziedzinie częstotliwości, w zależności od ilości funkcji zastosowanych dla każdej linii $\rho = const$, $z = const$

	3D FDFD	3 funkcje bazowe	5 funkcji bazowych
Częstotliwości rezonansowe [GHz]	5.447794	5.447767	5.447913
	5.48210	5.47876	5.476629
Błąd [%]	-	6e-4	2.2e-3
	-	6.1e-2	0.1
Rozmiar macierzy	538730	53531	33752
Norma macierzy	2.105e+27	7.217e+24	6.674e+24
Liczba operacji macierz-wektor	34924	2652	3104
Czas symulacji [s]	5810.42	79.97	60.22

4.2.3 Otwarty rezonator dielektryczny

Zmiana reprezentacji pól elektromagnetycznych, szczególnie gdy zmienne odpowiadają fizycznym rodzajom wzbudzanych w strukturze w miejsce próbek pola, pozwala definiować warunki brzegowe budowane w oparciu o znane rozwiązania analityczne. Przykładową implementację warunków brzegowych opartych na dyskretnym rozwinięciu modowym brzegowych w układzie cylindrycznym zaproponowano w [46]. Przytoczony poniżej przykład dotyczy wyznaczania rezonansów otwartego rezonatora dielektrycznego w dziedzinie częstotliwości. Rozwinięcia funkcyjne wykorzystano do przybliżonej separacji fal cylindrycznych wychodzących ze struktury. Separacja ta pozwoliła w prosty sposób zbudować analityczne warunki brzegowe [111].



RYSUNEK 4.8: Szkic rezonatora dielektrycznego w falowodzie radialnym.

Omawiana struktura przedstawiona jest na rys. 4.8. Jest to pastylka dielektryczna o dużej przenikalności względnej, $\epsilon_r = 38$, umieszczona między nieskończonymi płaszczyznami metalowymi, które dla celów analizy traktowane są jako falowód radialny. Z uwagi na osiową symetrię struktury można zastosować analizę dwuwymiarową, zakładając harmoniczną zmienność pól w kierunku φ . W odróżnieniu jednak od [19], transformację problemu z dziedziny 3 do 2.5 wymiarowej uzyskano przez projekcję w przestrzeni dyskretniej. Tak zmodyfikowany operator był punktem wyjścia do dalszych przekształceń.

Rozważaną strukturę logicznie można podzielić na część wewnętrzną, zawierającą dielektryk i jego najbliższe otoczenie oraz zewnętrzną, będącą falowodem radialnym [7]. Przy takim podziale, pola w części zewnętrznej wyrażają się zależnościami:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n,m} a_{1,n,m} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \cos(n\pi z/D) \sin(m\varphi) \quad (4.1)$$

$$E_\varphi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n,m} a_{2,n,m} H_m^{(2)'}(k_\rho \rho) \sin(n\pi z/D) \cos(m\varphi) + \sum_{n,m} b_{n,m} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \sin(n\pi z/D) \cos(m\varphi) \quad (4.2)$$

gdzie $H_m^{(2)}(k_\rho \rho)$ jest funkcją Hankela drugiego rodzaju a $H_m^{(2)'}$ ($k_\rho \rho$) jej pochodną a D wysokością struktury. Pominięto składową pola E_ρ , ponieważ nie występuje ona na brzegu dziedziny i nie jest konieczne budowanie dla niej warunków brzegowych. Aby wykorzystać zależności (4.1) i (4.2) do konstrukcji warunków absorpcyjnych, konieczne jest zdefiniowanie bazy projekcyjnej dla części zewnętrznej w oparciu o próbki funkcji harmonicznych w kierunku pionowym. Pozwala ona zbudować bezpośrednią relację między wartością zmiennej i amplitudą danego rodzaju. Pewnym problemem jest znalezienie warunku na E_φ , gdyż zmienność tej składowej w kierunku radialnym jest zarówno typu $H^{(2)}(k_\rho \rho)$ jak i $H^{(2)'}$ ($k_\rho \rho$). Pomocna jest separacja (4.1) na rodzaju TM, dla których $a_{2,n,m}=0$ oraz TE, dla których $b_{n,m} = 0$. Z uwagi na fakt, że $b_{n,m} = 0 \ll a_{1,n,m}$ dla rodzajów TM, z dobrym przybliżeniem można założyć $b_{n,m} = 0$, co znacznie upraszcza sformułowanie warunków brzegowych. Drugim problemem, który należy rozwiązać jest fakt, że relacja wiążąca elementy brzegowe dziedziny obliczeniowej z wewnętrznymi jest zależna od częstotliwości. Celowe byłoby zatem użycie metody iteracyjnej opisanej w [46]. Wymaga ona jednak wielokrotnego rozwiązywania problemu własnego, co jest bardzo kosztowne numerycznie. Aby uprościć procedurę zdecydowano się zwiększyć nieco dziedzinę obliczeniową, aby zmniejszyć błąd powodowany przez niedoskonałe warunki absorpcyjne. Przebadano 2 konfiguracje struktury - z dielektrykiem wypełniającym całą przestrzeń między metalowymi płaszczyznami, czyli $D = 4.6mm$, oraz niepełnej wysokości $D = 3.45mm$. W obu przypadkach promień dielektryka równy był $5.25mm$. Wyniki porównano z wynikami analitycznymi [76] dla pastylki o pełnej wysokości oraz symulatorem QuickWave [89] dla pastylki o niepełnej wysokości. Rozwiązanie badano przy różnych odległościach portów od środka struktury. Zgodnie z oczekiwaniami, dla większej dziedziny obliczeniowej wpływ warunków brzegowych na wynik obliczeń jest mniejszy i wyniki dokładniejsze. Wyniki testów dla przypadku pierwszego, zebrane w tabeli 4.9 pokazują, że nawet dla bardzo małej dziedziny obliczeniowej dokładność wyników jest na poziomie 1 procenta. Warto wspomnieć, że identyczną strukturę przeanalizowano w [76] metodą FDTD. Przeanalizowano tam jednak relatywnie dużą dziedzinę obliczeniową, $\rho = 25mm$. Przy takiej konfiguracji wpływ warunków brzegowych był znikomy. Większe problemy pojawiają się przy analizie dielektryka o niepełnej wysokości. W obszarze dielektryka następuje sprzęganie się rodzajów, w tym w szczególności wzbudza się rodzaj o zerowej zmienności w kierunku z . Zważywszy na fakt, że jest on rodzajem nietłumionym, można spodziewać się, że praktycznie każdy z modów rezonansowych takiej struktury jest promieniujący. Odpowiednie warunki brzegowe mają więc kluczowy wpływ na dokładność obliczeń. Jak widać w tabeli (4.10) wyniki obliczeń, porównane z symulatorem są mniej dokładne, choć wciąż pozostają w dobrej zgodności z odniesieniem. W chwili obecnej trwają intensywne prace nad doskonaleniem warunków brzegowych budowanych w opisany powyżej sposób tak, by z dużą dokładnością określać rodzaje o niskiej dobroci, istotne w

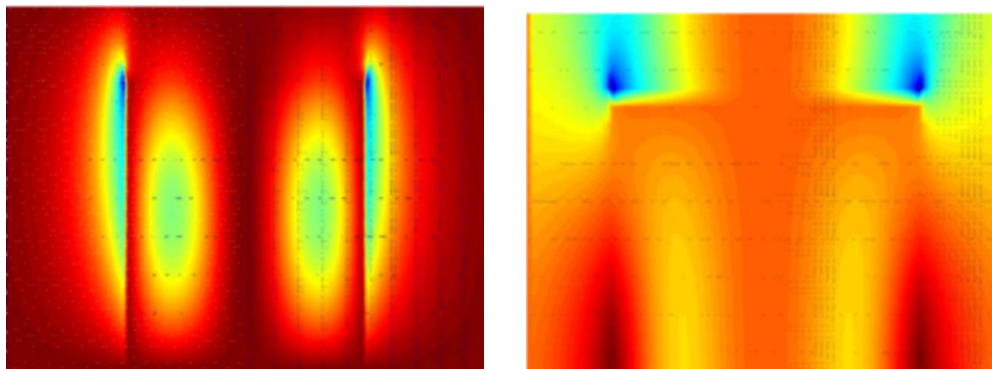
zagadnieniach propagacyjnych [88].

TABELA 4.9: Wartości częstotliwości rezonansowych rezonatora z wkładką dielektryczną o pełnej wysokości. Wyniki analityczne porównano z rozwiązaniami dla różnych wielkości dziedziny obliczeniowej. Zaznaczono zarówno uzyskane częstotliwości rezonansowe jak i błąd w procentach.

	Rozwiązanie analityczne	$r = 10.5mm$	$r = 8mm$	$r = 6mm$
Częstotliwość [GHz]	6.21	6.21	6.21	6.16
Błąd [%]		0.000	0.000	-0.805
Częstotliwość [GHz]	7.51	7.51	7.51	7.46
Błąd [%]		0.000	0.000	-0.666
Częstotliwość [GHz]	8.33	8.33	8.32	8.14
Błąd [%]		0.000	-0.120	-2.281
Częstotliwość [GHz]	9.50	9.49	9.50	9.48
Błąd [%]		-0.105	0.000	-0.211
Częstotliwość [GHz]	9.73	9.72	9.72	9.63
Błąd [%]		-0.103	-0.103	-1.028

TABELA 4.10: Wartości częstotliwości rezonansowych rezonatora z wkładką dielektryczną o niepełnej wysokości. Wyniki z symulatora QW porównano z rozwiązaniami dla różnych wielkości dziedziny obliczeniowej. W QW przebadano strukturę o promieniu $\rho = 40mm$, zakończoną warstwą PML.

	QW	$r = 10.5mm$	$r = 8mm$	$r = 6mm$
Częstotliwość [GHz]	6.52	6.62	6.63	6.46
Błąd [%]		1.534	1.687	-0.920
Częstotliwość [GHz]	8.39	8.39	8.38	8.31
Błąd [%]		0.000	-0.119	-0.954
Częstotliwość [GHz]	8.87	8.86	8.87	8.81
Błąd [%]		-0.113	0.000	-0.676
Częstotliwość [GHz]	9.84	9.81	9.81	9.77
Błąd [%]		-0.305	-0.305	-0.711
Częstotliwość [GHz]	10.49	10.44	10.47	10.52
Błąd [%]		-0.477	-0.191	0.286
Częstotliwość [GHz]	10.82	10.79	10.78	10.72
Błąd [%]		-0.277	-0.370	-0.924



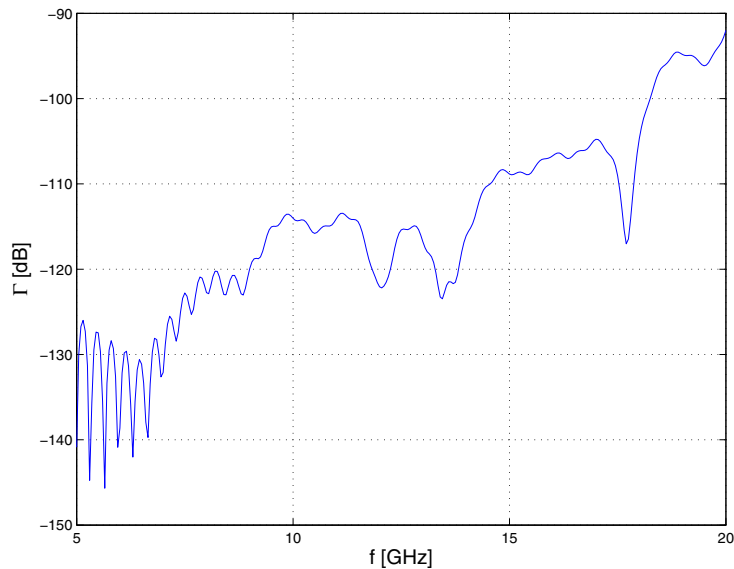
(a) Składowa E_ρ pierwszego rodzaju dla rezonatora z dielektrykiem o niepełnej wysokości

(b) Składowa E_z pierwszego rodzaju dla rezonatora z dielektrykiem o niepełnej wysokości

RYSUNEK 4.9: Przykładowe rozkłady pola w otwartym rezonatorze.

4.3 Analiza odbić na granicy FDTD i rozwinięć funkcyjnych

Bardzo istotnym zagadnieniem związanym z implementacją schematów hybrydowych jest wpływ łączenia dziedzin na ich dokładność. Aby wyestymować błąd związany z łączeniem różnych siatek metodą projekcji zbadano współczynnik odbicia od pustego obszaru analizowanego różnymi metodami, umieszczonego wewnątrz siatki FDTD. Jako strukturę testową zdefiniowano falowód prostokątny o wymiarach $a=22.86\text{mm}$ na $b=10.16\text{mm}$ i długości 2000mm . Zdefiniowano tak długą dziedzinę obliczeniową aby wyeliminować wpływ odbicia fali od jej końca na wyniki testu. Siatka Yee pokrywająca dziedzinę obliczeniową miała rozmiar 46 na 23 na 1000 węzłów, co daje rozmiar pojedynczej komórki odpowiednio $\Delta x = 0.508\text{mm}$, $\Delta y = 0.461\text{mm}$, $\Delta z = 1\text{mm}$. Parametry te zostały dobrane tak, by warunki były zbliżone do zastosowanych w [55, 77]. Różnica w porównaniu ze wspomnianymi pozycjami polega na tym, że w niniejszym teście wyróżniony obszar jest rozrzedzany, natomiast w [55, 77] zagęszczany. Modyfikowany fragment znajdował się między 100 a 120 oczkiem w kierunku podłużnym oraz między 4 a 42 w kierunku x i 4 i 18 w kierunku y . Strukturę pobudzo no rodzajem podstawowym TE_{10} . Charakterystykę odbiciową zbadano w paśmie od 6.5GHz do 20GHz , czyli począwszy od częstotliwości odcięcia aż do częstotliwości, dla której stosunek długości fali do rozmiaru oczka (dla siatki tła) wynosi 20 w niezmodyfikowanym obszarze i odpowiednio mniej w rzutowanym fragmencie dziedziny. Dzięki rzutowaniu obszaru portów na próbki funkcji harmonicznych zmienne w tym rejonie bezpośrednio odpowiadają amplitudom rodzajów. Pobudzenie ogranicza się zatem do wymuszenia wartości jednej zmiennej. Podobnie w końcowej części falowodu, począwszy od 300 warstwy zastosowano rozwinięcie modowe DPEE wzorowane na [47] w celu ograniczenia liczby zmiennych. Teoretycznie próbki funkcji harmonicznych, będące funkcjami własnymi dyskretnego operatora rotacji, powinny dawać zerowe odbicie. Wykonana symulacja pokazuje, że w interesującym paśmie jest ono na poziomie -100dB . Wykres współczynnika odbicia w funkcji częstotliwości pokazano na rys. 4.10.

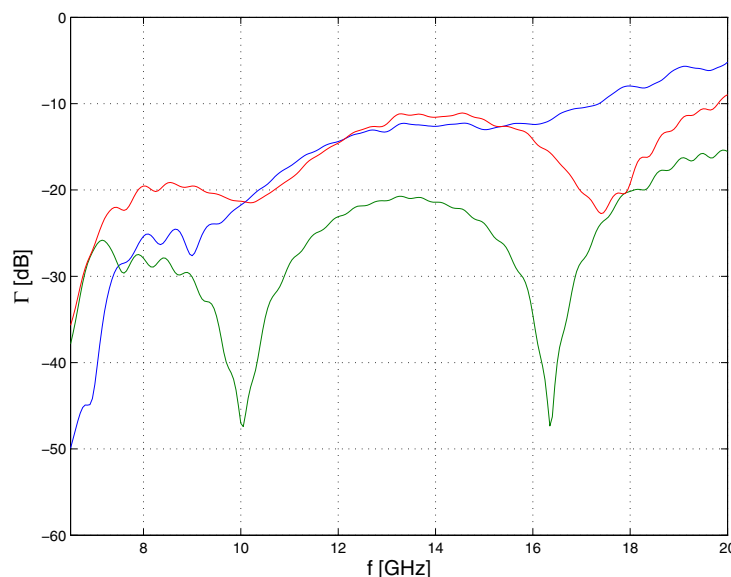


RYSUNEK 4.10: Współczynnik odbicia na granicy PEE-FDTD w zakresie pracy falowodu.

Subgridding 2:1 i inne schematy Haara

Najprostsza modyfikacja siatki polega na rozrzedzeniu pierwotnej siatki Yee w stosunku 2:1. Oznacza to, że wyróżniony obszar 38 na 14 na 20 oczek Yee został „wymieniony” na kostkę 19 na 7 na 10 oczek. Modyfikacji dokonano definiując bazę projekcyjną w postaci falek Haara rzędu 0 i nośniku $P = 2$. Stosunek rozmiaru siatki do długości fali wynosi w przybliżeniu 1:10 dla modyfikowanego obszaru przy częstotliwości około 17GHz. W kontekście rozważań przedstawionych w podrozdziale 3.7.2 można spodziewać się dużego odbicia od tak zdefiniowanej dziedziny. Wykonany test potwierdza wcześniejsze przypuszczenia. Współczynnik odbicia, pokazany na rys. 4.11, oscyluje powyżej -20dB , co praktycznie dyskwalifikuje takie łączenie w zastosowaniach elektrodynamiki obliczeniowej.

Kolejny test z użyciem falek Haara wykonano przekształcając wyróżniony obszar z użyciem falek Haara rzędu 1 i nośniku równym $P = 4$. Analizując budowę falek Haara można zauważyć, że przestrzeń zdefiniowana w ten sposób jest identyczna z przestrzenią z poprzedniej symulacji, wykorzystującej falki rzędu zerowego o mniejszym nośniku. W obu przypadkach identyczna jest też liczba zmiennych opisujących modyfikowany obszar. Współczynnik odbicia dla tej symulacji naniesiono również na rys. 4.11. Co ciekawe, wynik ten, dający odbicie na poziomie około -20dB znacząco różni się od uzyskanego dla poprzedniego przypadku. Powodów takiego zachowania można szukać w innym sposobie sprzężenia obszarów (por. podrozdział 3.7.2). Aby sprawdzić jak zachowa się układ przy większym rozrzedzeniu siatki wykonano kolejny test, gdzie zastosowano również falkę Haara 1 rzędu, ale o większym nośniku $P = 6$. W sensie liczby zmiennych odpowiada to przepróbkowaniu pierwotnej siatki Yee w stosunku 3:1. Wynik ten jest również przedstawiony na rys. 4.11, jak widać jest nieco lepszy od subgriddingu 2:1. Należy bowiem pamiętać, że granica 10 zmiennych na długość fali przypada w tym przypadku dla częstotliwości około 13 GHz. Wszystkie wymienione powyżej przypadki dają jednak znaczne odbicie w porównaniu z wartościami rzędu -40dB w [77] czy -50dB w [55].



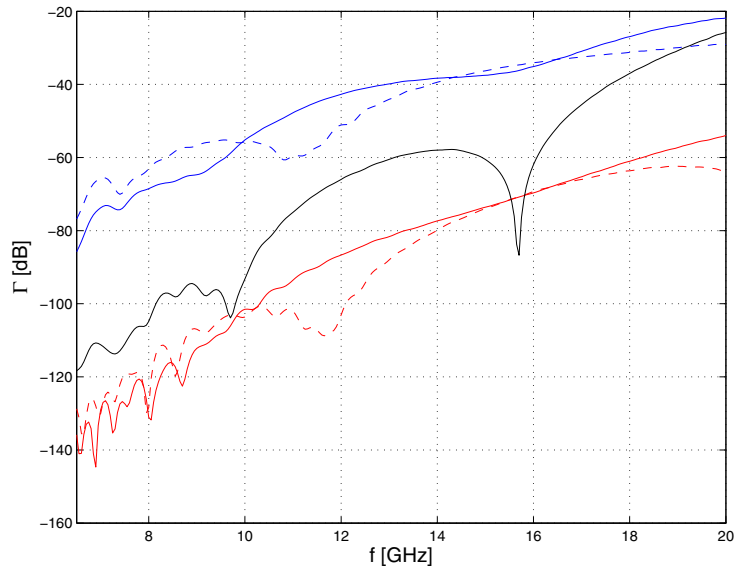
RYSUNEK 4.11: Współczynnik odbicia dla algorytmu hybrydowego FDTD i algorytmu falkowego Haara. Linią czerwoną zaznaczono współczynnik odbicia od siatki Haara $P = 7$ rzędu 1, zieloną $P = 4$ rzędu 1. Na niebiesko zaznaczono współczynnik odbicia w przypadku subgriddingu 2:1, równoważnemu schematowi Haara $P = 2$ zerowego stopnia.

Dyskretne wielomiany Legendre'a

W omawianych wcześniej przykładach dużą wagę przywiązywano do wektorów bazujących na próbkach wielomianów Legendre'a (3.69), reprezentujących pole we wszystkich trzech kierunkach. Aby ocenić błąd wprowadzany przez ich zastosowanie obliczono współczynnik odbicia, definiując w modyfikowanym obszarze 38 na 14 na 20 oczek odpowiednie bazy projekcyjne, oparte na następujących wielomianach:

1. Dyskretny wielomian Legendre'a - rząd 1 $P = 4$. Stosunek liczby zmiennych przed i po projekcji 64:8.
2. Dyskretny wielomian Legendre'a - rząd 1 $P = 5$. Stosunek liczby zmiennych przed i po projekcji 125:8.
3. Dyskretny wielomian Legendre'a - rząd 2 $P = 4$. Stosunek liczby zmiennych przed i po projekcji 64:27.
4. Dyskretny wielomian Legendre'a - rząd 2 $P = 5$. Stosunek liczby zmiennych przed i po projekcji 125:27.
5. Dyskretny wielomian Legendre'a - rząd 2 $P = 7$. Stosunek liczby zmiennych przed i po projekcji 343:27.

Konfiguracja 1 i 2 została przebadana, jako najczęściej wykorzystywana w przeprowadzonych testach. Daje ona bowiem optymalny stosunek przyspieszenia do dokładności. W teście daje jednak odbicie na poziomie -40 do -30 dB, co nie w każdym warunkach jest satysfakcjonującym wynikiem. Warto jednak zwrócić uwagę, że funkcje te dają ponad 20 dB zysku



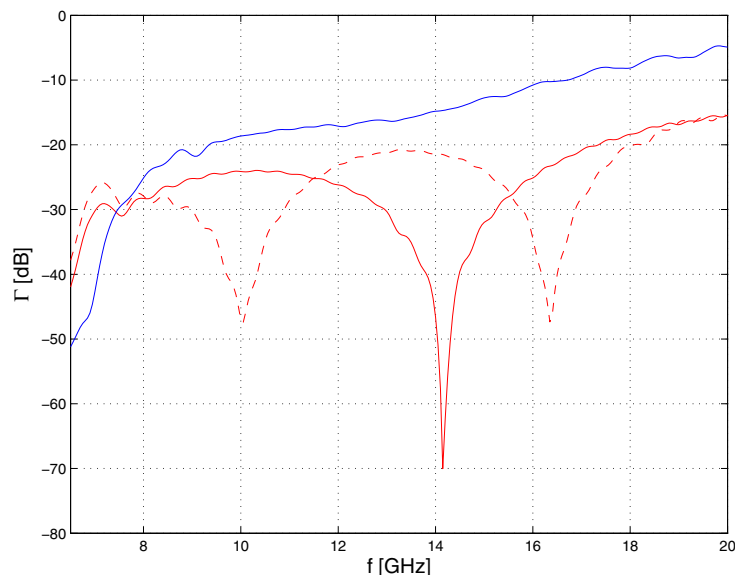
RYSUNEK 4.12: Współczynnik odbicia dla algorytmu hybrydowego FDTD i dyskretnych wielomianów Legendre'a. Na niebiesko zaznaczono wyniki dla funkcji rzędu 1 i nośniku równym 4 (linia ciągła) i 5 (linia przerywana). Odpowiednio na czerwono zaznaczono wyniki symulacji z użyciem dodatkowo funkcji rzędu 2. Kolorem czarnym zaznaczono współczynnik odbicia w przypadku $P = 7$.

w porównaniu ze schematem Haara opisywanym identyczną liczbą zmiennych. Znaczną poprawę wyników uzyskano dla konfiguracji 3 i 4, czyli definiując funkcje rzędu 2. Uzyskano rezultat rzędu -60 do $-70dB$ dla krótszych fal i poniżej $-100dB$, dla gęstości siatki powyżej 20 próbek na długość fali. Dokładnie, dla 12 GHz długość fali równa jest około 30mm, czyli 30 oczek siatki tła. Stosowanie wielomianu rzędu 0 i 1 dla $P = 4$ daje efektywnie 22.5 zmiennej na długość fali, natomiast dla $P = 5$ - 18 zmiennych.

Schemat Haara z obszarem przejściowym

Naturalnym rozwinięciem przytoczonych powyżej testów jest próba zastosowania algorytmu Haara, który może być sprowadzony do subgriddingu dodając jednocześnie niskoodbiciową warstwę w postaci wielomianów na granicy dziedzin FDTD i opisanej falkami Haara. Próby takie przeprowadzono, dodając do rozwinięć Haara warstwę buforową w postaci wielomianów Legendre'a. Z obszaru testowego 38 na 14 na 20 wydzielono środkową część 38 na 14 na 10 oczek w której zastosowano funkcje Haara rzędu 0 o rozmiarze nośnika $P = 2$.

w pierwszym teście oraz funkcje rzędu 1 i $P = 4$ w teście drugim. Warstwa buforowa w obu testach zbudowana była w oparciu o wielomiany Legendre'a $P = 4$ i rzędu 2. Rezultaty symulacji, pokazane na rysunku 4.13, są praktycznie identyczne jak w przypadku pierwszej serii testów. Innymi słowy strefa buforowa w postaci wielomianów praktycznie nie poprawia dopasowania obu dziedzin.



RYSUNEK 4.13: Współczynnik odbicia dla algorytmu hybrydowego FDTD i schematu Haara z wykorzystaniem warstwy pośredniej w postaci wielomianów Legendre'a. Na czerwono zaznaczono odbicie od funkcji Haara $P = 4$, na niebiesko subgridding 2:1. Linia przerywaną zaznaczono charakterystykę odbiciową funkcji Haara $P=4$ rzędu 1 bez warstwy pośredniej (rys. 4.11).

4.4 Analizy w dziedzinie czasu

Większość symulacji dokonywanych Metodą Różnic Skończonych sformułowana jest w dziedzinie czasu. W zaprezentowanych poniżej przykładach pokazane będą zagadnienia istotne w implementacji metod projekcji w sformułowaniu czasowym, w małym stopniu akcentowane w dotychczasowych rozważaniach. Jednym z tych zagadnień jest gęstość macierzy po projekcji. Czas symulacji, mierzony w liczbie iteracji wykonywanych w jednostce czasu zależy bowiem w równym stopniu od rozmiaru i gęstości samej macierzy. Okazuje się, że zły dobór funkcji bazowych może spowodować zagęszczenie macierzy powodujące wręcz spadek wydajności algorytmu. Problemy takie występują w szczególności w analizach z dużą liczbą granic między dziedziną różnic skończonych a innymi rozwinięciami. Granice takie z reguły powodują wystąpienie gęstych bloków w macierzy, co w oczywisty sposób negatywnie wpływa na wydajność obliczeniową.

4.4.1 Rezonatory cylindryczne analizowane w dziedzinie czasu.

Poniżej zaprezentowano analizę dwóch rezonatorów cylindrycznych w dziedzinie czasu, omówionych w [114]. Pomimo ich dość prostej geometrii, widoczne są tu podstawowe aspekty związane z użyciem metod projekcji w Metodzie Różnic Skończonych. Szkice rezonatorów przedstawiono na rys 4.14 i 4.15. Zdefiniowanie analizy w układzie cylindrycznym pozwala z jednej strony dobrze odwzorować strukturę w siatce, z drugiej jednak, małe wymiary komórek bliskich środka układu powodują bardzo mały krok czasowy symulacji. Z tego powodu technika PEE zastosowana do układów o symetrii osiowej daje radykalny wzrost wydajności zarówno dzięki redukcji liczby zmiennych jak i wydłużenia kroku czaso-

wego. Porównując kształt obu struktur widać, że w pierwszej z nich jednorodny fragment, możliwy do rozwinięcia techniką PEE, można wydzielić w zewnętrznej części struktury. Oznacza to, że nie ma możliwości redukcji normy macierzy poprzez zastosowanie rozwinięć blisko osi układu. Modyfikując pierwotne sformułowanie można zredukować jedynie liczbę zmiennych. Przypadek drugi, z punktu widzenia możliwości projekcji, podobny jest do omawianych wcześniej rezonatorów. Jednorodny środek układu pozwala zastosować korzystniejszą konfigurację, czyli rozwinięcia w środkowej części dziedziny, co pozwoli jednocześnie zredukować liczbę zmiennych i krok czasowy. Dla obu struktur przedstawionych na rys. 4.14 i 4.15 zdefiniowano jednakową siatkę o rozmiarach oczka $1mm$ w kierunkach ρ i z oraz $\pi/20$ w kierunku φ . Zastosowanie takiej dyskretyzacji prowadzi do zdefiniowania problemu o rozmiarze około 160 tys. zmiennych. Sposób modyfikacji dziedziny widoczny jest odpowiednio na rysunkach 4.14(b) i 4.15(b). Wyniki symulacji przedstawiono odpowiednio w tabelach 4.11 i 4.12. Zestawiono w nich znalezione częstotliwości rezonansowe i porównano efektywność rozwiązania FDTD i hybrydowego PEE-FDTD. Widoczne tam wielkości potwierdzają powyższe rozważania: przy podobnej liczbie zmiennych czas analizy rezonatora drugiego był ponad dwukrotnie krótszy.

TABELA 4.11: Parametry symulacji rezonatora z rys. 4.14 oraz znalezione częstotliwości rezonansowe.

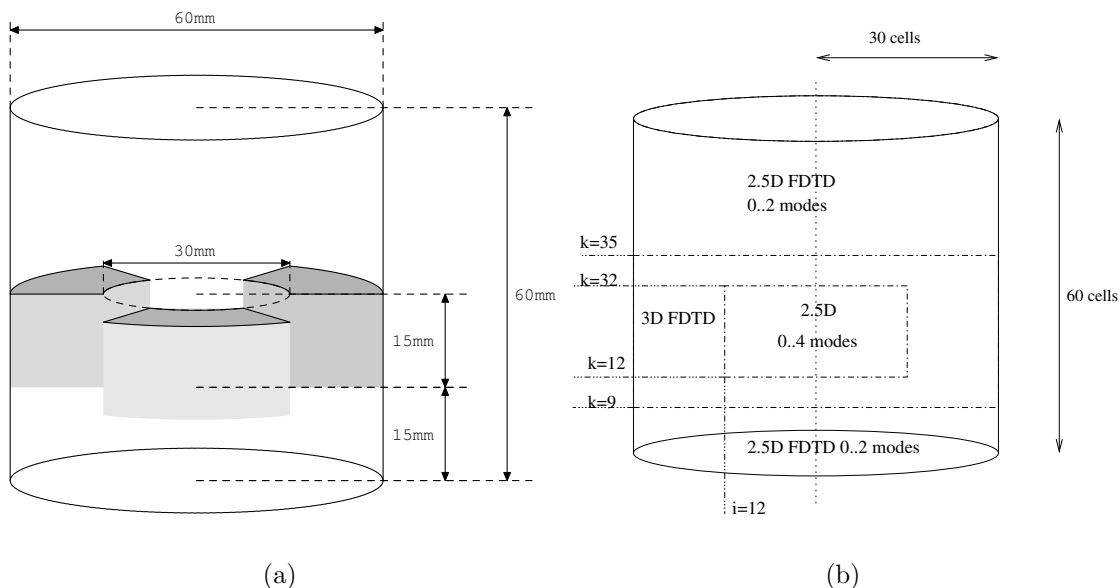
analiza	f [GHz]	it / s	Rozmiar macierzy	Względny błąd [%]	Przyspieszenie
3D	3.5029	22	162060	-	-
2.5D	3.4993	58	70386	0.102	2.43

TABELA 4.12: Wyniki analizy rezonatora z rys. 4.15. Zaznaczono przyspieszenie analizy uwzględniające jedynie redukcję wielkości problemu, jak i zmianę kroku czasowego symulacji.

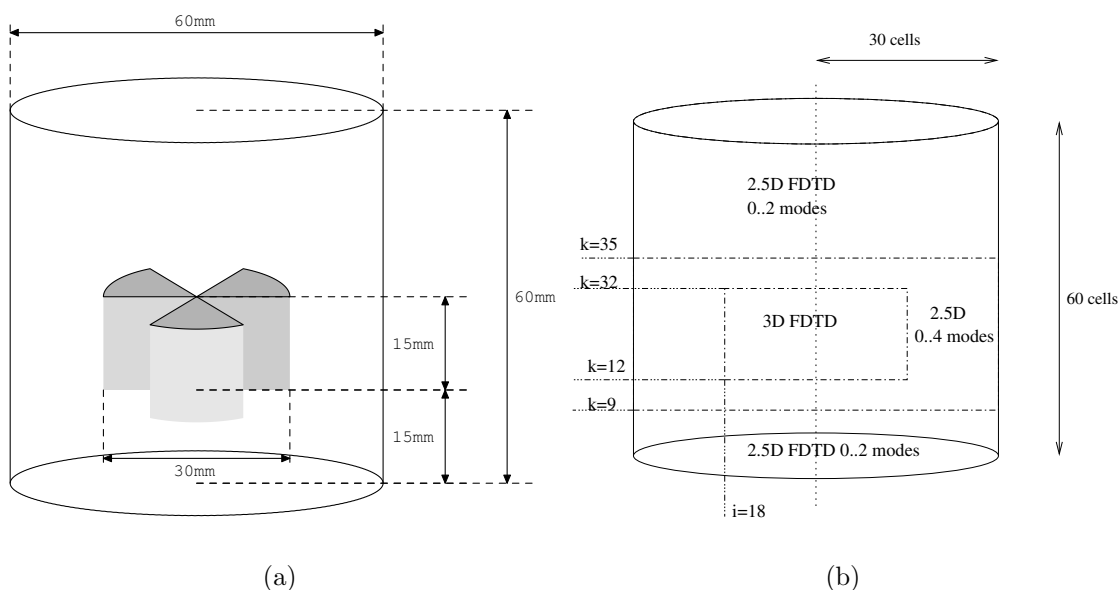
analiza	f [GHz]	it / s	Rozmiar macierzy	Względny Błąd [%]	Przyspieszenie	Całkowite przyspieszenie
3D	3.1802	24	162060	-	-	-
2.5D	3.1788	58	61260	0.044	2.43	6.03

4.4.2 Rezonatory dwurodzajowe analizowane w dziedzinie czasu

Poniżej zaprezentowano analizę czasową rezonatorów znanych już z rozdziału 4.2.1. Oba rezonatory są dwurodzajowe, czyli posiadają dwa bardzo zbliżone rezonanse. Znalazienie ich metodą czasową jest dość kłopotliwe, odróżnienie bowiem bardzo bliskich rezonansów wymaga analizy bardzo długich próbek czasowych. Dla przykładu, rezonator prostokątny [61] analizowany w paragrafie 4.2.1, zdyskretyzowany w siatce prostokątnej, wymaga analizy ze stałą czasową Δt około $1e - 13$ sekundy, czyli na 1 okres drgań przy częstotliwości rezonansowej (około 4GHz) przypada 1000 iteracji. Częstotliwość rezonansową można znaleźć na podstawie przebiegu czasowego o długości rzędu kilku tysięcy próbek. W przypadku konieczności rozróżnienia dwóch rodzajów o minimalnej różnicy częstotliwości rzędu



RYSUNEK 4.14: Widok rezonatora z wkładkami dielektrycznymi ($\epsilon_r = 20$). Po prawej zaznaczono podział dziedziny na rejony PEE i FDTD.



RYSUNEK 4.15: Widok rezonatora z wkładkami dielektrycznymi ($\epsilon_r = 20$). Po prawej zaznaczono podział dziedziny na rejony PEE i FDTD.

1 %, analizowany przebieg czasowy musi mieć długość porównywalną z okresem zdudnienia, czyli ponad 100000 próbek. Taka liczba iteracji jest wystarczająca pod warunkiem użycia algorytmu GPOF [38] w miejsce tradycyjnie stosowanej dyskretnej transformaty Fouriera.

Wnęka prostokątna obciążona cylindryczną pastylką dielektryczną

W niniejszym przykładzie powtórzona zostanie analiza rezonatora [61], omówionego w podrozdziale 4.2.1. Tym razem problem został sformułowany w siatce prostokątnej, czyli analiza FDTD była bardzo zbliżona do zaprezentowanej w [39]. Siatka różnicowa zdefiniowana dla struktury miała rozmiar $50 \times 50 \times 50$ oczek. Na potrzeby analizy hybrydowej struktura została podzielona na trzy podobszary: poniżej dielektryka, powyżej niego oraz na region środkowy, zawierający wkładkę. Przy zdefiniowaniu siatki prostokątnej równej 50 oczek w każdym kierunku, oznacza to, że obszary poniżej 12 i powyżej 30 warstwy $z = const$ są modyfikowane, natomiast obszar pastylki analizowany jest klasycznym algorytmem FDTD. Jako wektorów bazowych użyto dyskretnych falek Haara rzędu 0 i 1 oraz wielomianów Legendre'a rzędu 1. Wielomiany Legendre'a zdefiniowano na nośniku wielkości $P_x = P_y = 8$, $P_z = 4$, natomiast falki Haara dla $P_x = P_y = P_z = 4$. Wielkości te były korygowane przy granicach dziedziny o 1 oczko. Wyniki wszystkich symulacji przedstawiono w tabeli 4.13. Na uwagę zasługuje porównanie rozwinięć z użyciem wielomianów stopnia 1 i 2 (POLY 8 1 z POLY 8 2). Dodanie kolejnych funkcji daje znikomą poprawę dokładności, jednocześnie spowalnia symulację o prawie 40%, pomimo, że liczba zmiennych wzrosła nieznacznie, bo o około 10%. Bardzo wyraźnie widać tu wpływ zagęszczenia macierzy na czas pojedynczej iteracji. Dla porównania, symulacja z użyciem wektorów Haara, gdzie liczba zmiennych jest o 50% większa przebiega praktycznie z tą samą szybkością.

TABELA 4.13: Wyniki symulacji prostokątnego rezonatora obciążonego wkładką dielektryczną B 4.4. Jako FDTD oznaczono analizę różnicową bez modyfikacji, POLY1 - analizę z użyciem wielomianów Legendre'a 1 stopnia POLY2 - z dodatkowym wielomianem 2 stopnia. Symbolem HAAR oznaczono analizę z użyciem falek Haara stopnia 1.

Analiza	FDTD	POLY 8 1	POLY 8 2	HAAR 4 1	[61]
f	4.1417	4.1428	4.1436	4.1656	4.153
Błąd [%]	0.27	0.24	0.22	0.3	
it/s	48	132	80	82	
Wzg. przyspieszenie	1	2.75	1.6	1.7	
Liczba zmiennych	360k	120k	132k	197k	
Niezerowe elementy	1.44M	810k	1.58M	1.42M	

Dwurodzajowy rezonator cylindryczny o zakłóconej symetrii osiowej

Problemy podobne do opisanych w powyższym przykładzie występują przy analizie czasowej rezonatora cylindrycznego, opisanego w [5] i [6], rozważanego w podrozdziale 4.2.2. Siatka Yee była nieco gęstsza niż zdefiniowana dla analizy w dziedzinie częstotliwości, dziedzinę obliczeniową zdyskretyzowano bowiem na siatce $50 \times 120 \times 50$. Jako częstotliwość odniesienia przyjęto wyniki poprzedniej symulacji FDFD. Wykonano 4 symulacje. Zastosowane rozwinięcia zostały przedstawione w tabeli 4.14. W porównaniu ze zwyczajną symulacją FDTD, dzięki zastosowaniu rozwinięć funkcyjnych trzykrotnie zwiększono krok czasowy.

W sumie, różnica w czasie symulacji FDTD i PEE była 50-krotna. Dokładne parametry symulacji zamieszczono w tabeli 4.15. Dalsze przyspieszenie uzyskano już wyłącznie dzięki redukcji liczby zmiennych, rozwijając pierścień wokół wcięcia przy pomocy wielomianów (symulacja II) oraz stosując rozwinięcie wielomianowe w kierunku z (symulacja III).

TABELA 4.14: Modyfikacje dziedziny w symulacjach I - III rezonatora o zakłóconej symetrii osiowej.

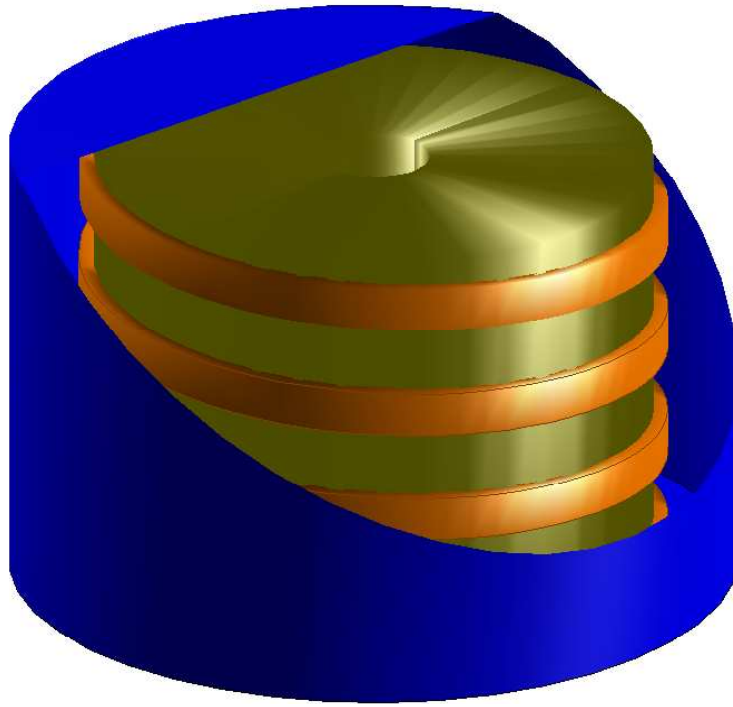
symulacja	obszar	zastosowane funkcje
I	Cała dziedzina z wyjątkiem pierścienia $15\Delta r < \rho < 26\Delta r$ i $6\Delta z < z < 23\Delta z$	Funkcje harmoniczne rzędu 0 do 2 w kierunku φ
II	Cała dziedzina z wyjątkiem pierścienia $15\Delta r < \rho < 26\Delta r$ i $6\Delta z < z < 23\Delta z$	Funkcje harmoniczne rzędu 0 do 2
III	Pierścień $15\Delta r < \rho < 26\Delta r$ i $6\Delta z < z < 23\Delta z$ z wyjątkiem obszaru wcięcia $1\Delta\varphi < \varphi < 10\Delta\varphi$	wielomiany $P=5$, rzędu 1
	Poniżej $z = 6\Delta z$	funkcje harmoniczne rzędu 0 do 2 w kierunku φ
	Powyżej $z = 23\Delta z$	Funkcje harmoniczne w kierunku φ oraz wielomiany $P=5$, rzędu 1 w kierunku z

TABELA 4.15: Wyniki symulacji dwurodzajowego rezonatora cylindrycznego. Jako częstotliwości referencyjnej użyto wyników z symulacji I.

Symulacja	FDTD	I	II	III
Rozmiar	876270	62430	50955	30083
Elementy niezerowe	3.5M	397K	213K	149K
it / s	25	342	410	655
Względne przyspieszenie [%]	0.5	0	20	91
Częstotliwości [GHz]	5.4914	5.4914	5.4918	5.4896
	5.4484	5.4484	5.4486	5.4459
błąd [%]	0	0	7e-3	3.2e-2
	0	0	3.7e-3	4.5e-2

4.5 Struktury zawierające linie spiralne

Analiza hybrydowa z zastosowaniem metod projekcji została praktycznie wykorzystana w symulacjach dotyczących wpływu zewnętrznego pola elektromagnetycznego niskiej częstotliwości, wzbudzanego podczas badania MRI, na elektrody zasilające rozruszniki serca [86]. Badana struktura zbudowana była na bazie podwójnej linii spiralnej, w związku z



RYSUNEK 4.16: Rezonator obciążony linią helikalną - szkic struktury.

czym przygotowano szereg testów na strukturach zawierających spirale celem zweryfikowania metodologii i poprawności kodu. Wybrane przykłady zamieszczono poniżej, natomiast szkic analizy kluczowej struktury podsumowuje rozdział. Z uwagi na częściowo poufny charakter prac, nie przytacza się niektórych parametrów liczbowych symulacji.

4.5.1 Rezonator dwurodzajowy o zmniejszonej długości z linią spiralną

Linie transmisyjne na bazie spirali charakteryzują się relatywnie małą prędkością rozchodzenia się sygnału. Własność tę wykorzystano do budowy rezonatorów o znacznie zmniejszonych wymiarach [57, 58]. Szkic takiego rezonatora przedstawiono na rys. 4.16. W oryginalnej strukturze spirala została wykonana poprzez napylenie cienkiej warstwy srebra na walec dielektryczny. Do celów analizy założono, że jest ona wykonana z przewodu o szerokości 1.2mm i wysokości 1.25mm . Tak więc, metalowa puszką o promieniu $r = 16.5\text{mm}$ i wysokości $h = 20.83\text{mm}$ została obciążona pierścieniem dielektrycznym o względnej przenikalności $\epsilon_r = 20$ i promieniach wewnętrznym i zewnętrznym odpowiednio 5.1mm i 12.7mm . Na dielektryku nawinięto 4 zwoje, tak, że nie istnieje galwaniczne połączenie obudowy i spirali. Zgodnie z [58], istnieją bardzo bliskie rezonanse o ortogonalnych polaryzacjach.

Analizę struktury wykonano w cylindrycznym układzie współrzędnych. Rozmiar siatki wynosił odpowiednio 35, 50 i 40 oczek w kierunku ρ , φ i z , co daje wyjściowy rozmiar problemu około 210 tysięcy zmiennych. Analiza takiego problemu w dziedzinie częstotliwości trwała około 1 godziny i 40 minut, przy zastosowaniu algorytmu JCCG [4]. Z uwagi na fakt, że struktura charakteryzuje się relatywnie dużymi jednorodnymi obszarami, możliwe jest zastosowanie funkcji bazowych stosowanych w technice PEE. Analizę hybrydową wy-

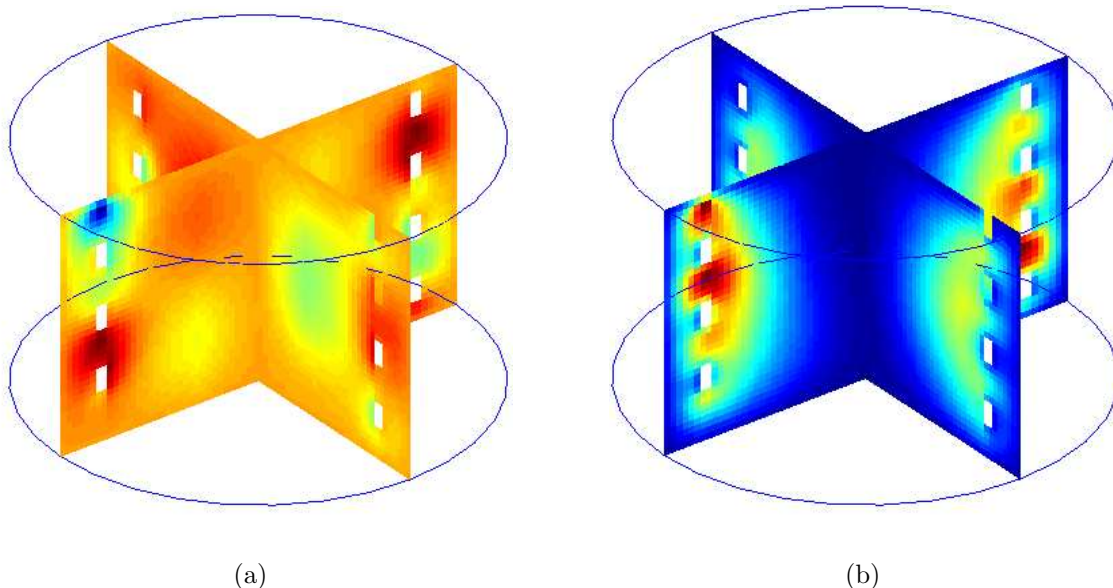
konano stosując rozwinięcia funkcyjne dla $\rho < 2/3r$. Wewnętrzny walec $\rho < r/3$ rzutowano z użyciem funkcji harmonicznych w kierunkach z (rzędu 4) i φ (rzędu 6). Kolejny obszar, $r/3 < \rho < 2r/3$ zmodyfikowano stosując rozwinięcia harmoniczne jedynie w kierunku φ . Pozostała część dziedziny obliczeniowej, zawierająca spiralę była analizowana z użyciem klasycznego sformułowania różnicowego. Dzięki redukcji zarówno normy jak i rozmiaru macierzy, symulacja w dziedzinie częstotliwości została przyspieszona dwudziestokrotnie - zamiast godziny i 40 minut trwała około 5 minut. Równoległe została wykonana symulacja czasowa. W tym przypadku przyspieszenie związane z zastosowaniem rozwinięć wynosiło około 12, czyli czas symulacji zmniejszył się z około godziny również do 5 minut. Szczegółowe parametry symulacji przedstawiono w tabeli 4.17. Częstotliwości rezonansowe uzyskane w analizie FDTD i hybrydowej są praktycznie identyczne, różnią się bowiem poniżej 0.1%. W literaturze nie jest podana dokładna wartość częstotliwości rezonansowej, autorzy jedynie wspominają, że pierwszy podwójny rezonans pojawia się dla częstotliwości około 1.7 GHz. W symulacjach opisanych w niniejszej pracy interesujące częstotliwości wynoszą około 1.8GHz. Wyniki zweryfikowano powtarzając symulację z wykorzystaniem pakietu QuickWave. Wyniki wszystkich symulacji, zestawione w tabeli 4.16, choć porównywalne, znacznie różnią się między sobą. Przyczyn rozbieżności należy szukać w aproksymacji spirali. Przeprowadzone dodatkowo testy wskazują, że częstotliwości rezonansowe są bardzo wrażliwe na zmianę geometrii przewodu.

TABELA 4.16: Częstotliwości rezonansowe uzyskane dla analiz: FDFD, hybrydowej PEE-FDFD oraz w symulatorze QuickWave.

3D FDFD	PEE FDFD	błąd [%]	QW
1.1478	1.1475	0.028798	
1.6482	1.6478	0.022182	
1.7654	1.7653	0.0087250	1.72
1.8568	1.8565	0.013423	
1.8744	1.8744	0.0013606	1.88
2.0212	2.0206	0.028729	2.01
2.2045	2.2037	0.034043	2.41

TABELA 4.17: Parametry symulacji rezonatora obciążonego spiralą metalową. Porównanie parametrów symulacji w dziedzinie częstotliwości i czasu.

Rozmiar macierzy	202K	72K
Elementów niezerowych	2.54M	940K
Norma macierzy	4.05e26	1.5e25
Liczba mnożeń macierz - wektor przy rozwiązywaniu problemu własnego	60000	9500
czas rozwiązania	1h40min	5min
Δt	8.93e-14	4.6e-13
it/s (w metodzie czasowej)	100	260



RYSUNEK 4.17: Rozkłady pola E_φ dla rezonansów 1.85 GHz (a) oraz 1.87 GHz (b)

4.5.2 Zamknięta linia TWT na bazie linii spiralnej - badanie charakterystyki dyspersyjnej

Linie transmisyjne o charakterze periodycznym znajdują szerokie zastosowanie między innymi w konstrukcji wzmacniaczy z falą bieżącą [43,44,110]. Wykorzystuje się tam zjawisko znacznego spowolnienia prędkości fali, co pozwala na interakcję pola elektromagnetycznego z wiązką elektronową. Jedną z typowych struktur przewodzących wykorzystywanych w takich wzmacniaczach jest właśnie linia helikalna. Poniżej omówiony jest przykład wyznaczenia prędkości propagacji sygnału w linii złożonej z pojedynczej spirali umocowanej na trzech podporach z tlenku berylu o parametrach elektrycznych $\varepsilon_r = 6.8$, $\text{tg } \delta = 1e-2$. Szkic rozważanej linii przedstawiono na rys. 4.19. Wymiary struktury zebrano w tabeli (4.18). Aby znaleźć charakterystykę dyspersyjną konieczne było dwukrotne wykonanie analizy dla linii o różnych długościach. Ekstrakcja charakterystyki dyspersyjnej przebiegała w następujących krokach [120] (por. rys. 4.18):

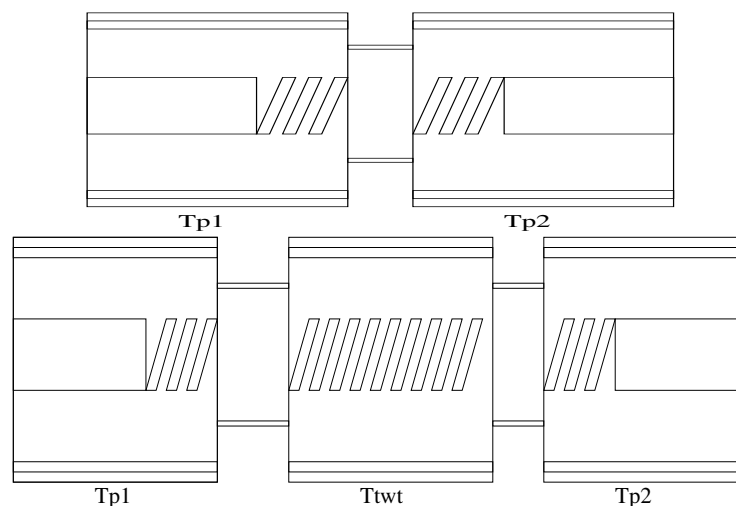
- Obliczenie macierzy rozproszenia i transmisji krótkiego odcinka kalibracyjnego

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{p1} \mathbf{T}_{p2}$$
- Obliczenia macierzy rozproszenia i transmisji struktury z długą linią

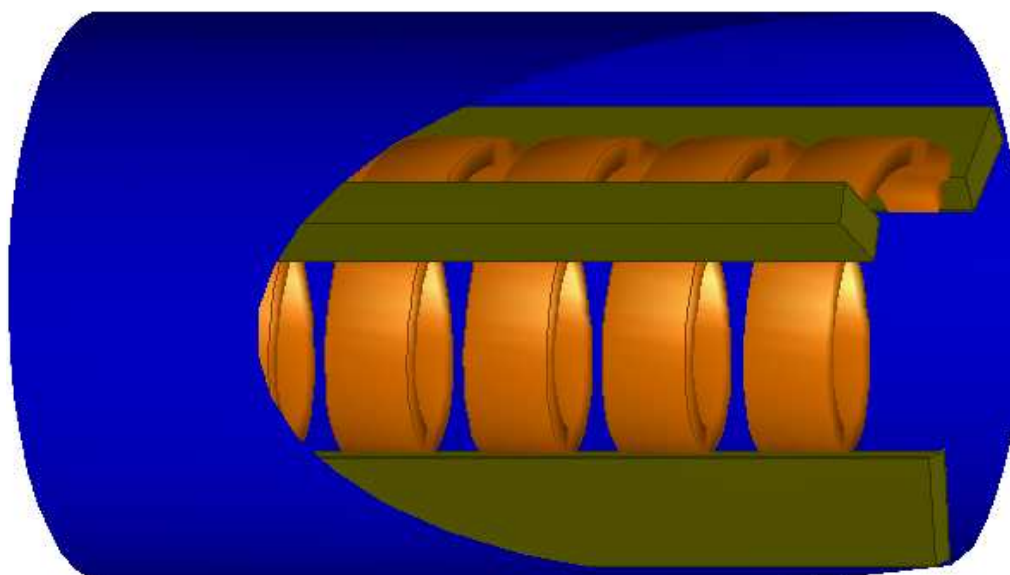
$$\mathbf{T}_l = \mathbf{T}_{p1} \mathbf{T}_{TWT} \mathbf{T}_{p2}$$
- Wyznaczenie macierzy transmisji środkowego odcinka linii,

$$\mathbf{T}_{TWT0} = \mathbf{T}_l \mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{T}_{p1} \mathbf{T}_{TWT} \mathbf{T}_{p1}^{-1}$$
- Macierz \mathbf{T}_{TWT0} i poszukiwana \mathbf{T}_{TWT} są podobne, tj. mają te same wartości własne równe $e^{\pm\gamma z_0}$, gdzie γ jest poszukiwaną stałą propagacji struktury a z_0 długością symulowanego odcinka.

Wyznaczenie parametrów rozproszenia wymagało zatem przeprowadzenia dwóch symulacji - kalibracyjnej i właściwej. W obu przypadkach wybrano siatkę o rozdzielczości



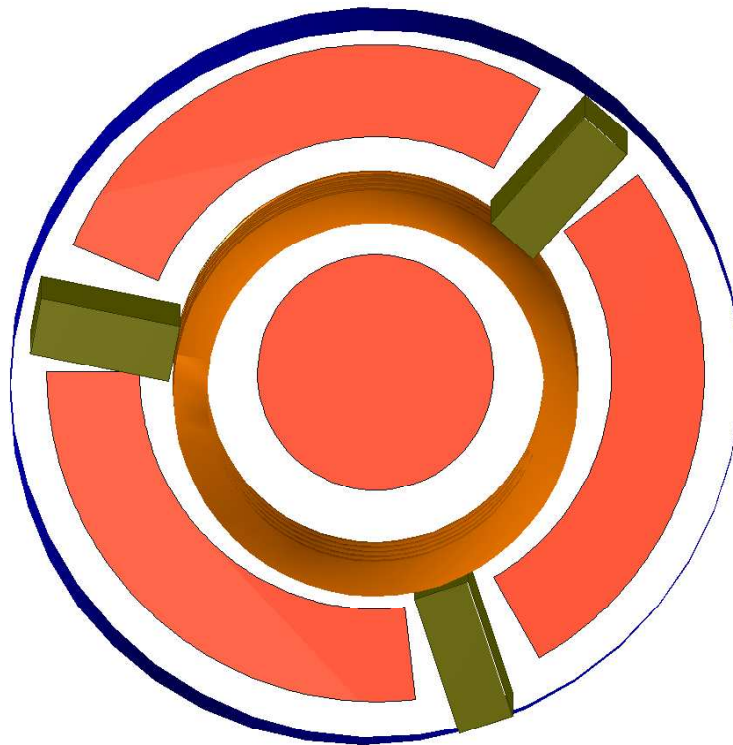
RYSUNEK 4.18: Konfiguracja kalibracyjna (u góry) i pomiarowa (u dołu) do obliczania współczynnika propagacji linii TWT.



RYSUNEK 4.19: Szkic struktury przewodzącej z linią helikalną. Wymiary struktury zebrano w tabeli 4.18.

$25.4e - 6mm$ w kierunku ρ i z oraz 51 oczek w kierunku φ . Długości struktur wynosiły odpowiednio 110 i 170 oczek, w tym po 20 warstw z każdej strony zajmowała linia koncentryczna, z której struktura była pobudzana. Porównanie parametrów i czasu symulacji znajduje się w tabeli (4.19). Użycie funkcji harmonicznych w analizie hybrydowej, jako dających największe przyspieszenie, było możliwe tylko w środkowej części dziedziny. Użytko dzięki temu 5-krotne wydłużenie kroku czasowego. Problem dużych jednorodnych obszarów pomiędzy spiralą a pokryciem zewnętrznym rozwiązano używając dwuwymiarowych funkcji wielomianowych w płaszczyźnie φz . Zastosowano funkcje o nośniku równym 5 w obu kierunkach, dzięki czemu każde 25 zmiennych siatki tła było reprezentowane przez 4 funkcje bazowe. Modyfikowane obszary dziedziny widoczne są na rysunku 4.20.

Ze względu na długą odpowiedź impulsową, konieczne było wykonanie około 100 tysięcy iteracji w przypadku analizy hybrydowej i prawie 500 tysięcy w przypadku analizy FDTD. Zatem ogólny czas symulacji z użyciem analizy hybrydowej wynosił 2 godziny, natomiast analiza FDTD trwała nieco ponad 10 godzin. Uzyskane charakterystyki dyspersyjne były prawie identyczne.



RYSUNEK 4.20: Podział dziedziny na podobszary. Na czerwono zaznaczono obszary modyfikowane: wewnętrzny obszar PEE, oraz obszary zewnętrzne, gdzie zdefiniowano rozwinięcia wielomianowe.

TABELA 4.18: Wymiary struktury przedstawionej na rys. 4.19

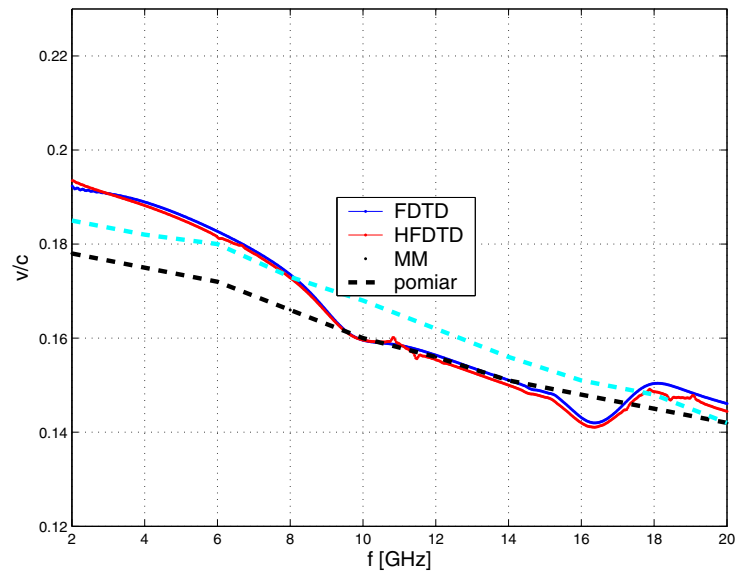
Średnica całkowita	2.79mm
Zewnętrzna średnica spirali	1.168mm
Wewnętrzna średnica spirali	0.965mm
Wymiary przewodu wewnętrznego	$0.1016mm \times 0.2032mm$
Wymiary supportów dielektrycznych	$0.08mm \times 0.97$
Skok spirali	1.066mm

4.5.3 Przykładowa analiza linii zasilającej rozrusznik serca

Przykłady analiz struktur zawierających linie spiralne stanowiły wstęp do symulacji linii zasilającej rozruszniki serca. Poprzednie analizy miały na celu zweryfikowanie poprawności kodu oraz metodologii obliczeń. Badane były struktury zbudowane na bazie podwójnej linii spiralnej. Szkic przykładowej linii widoczny jest na rys. 4.1. Symulacje prowadzono przy współpracy z firmą Medtronic Inc. [86, 87]. Analiza elektromagnetyczna była jednym

TABELA 4.19: Parametry 4 symulacji linii TWT. Porównano symulacje metodą FDTD i hybrydową (HFDTD) dla linii o długości 110 i 170 oczek siatki.

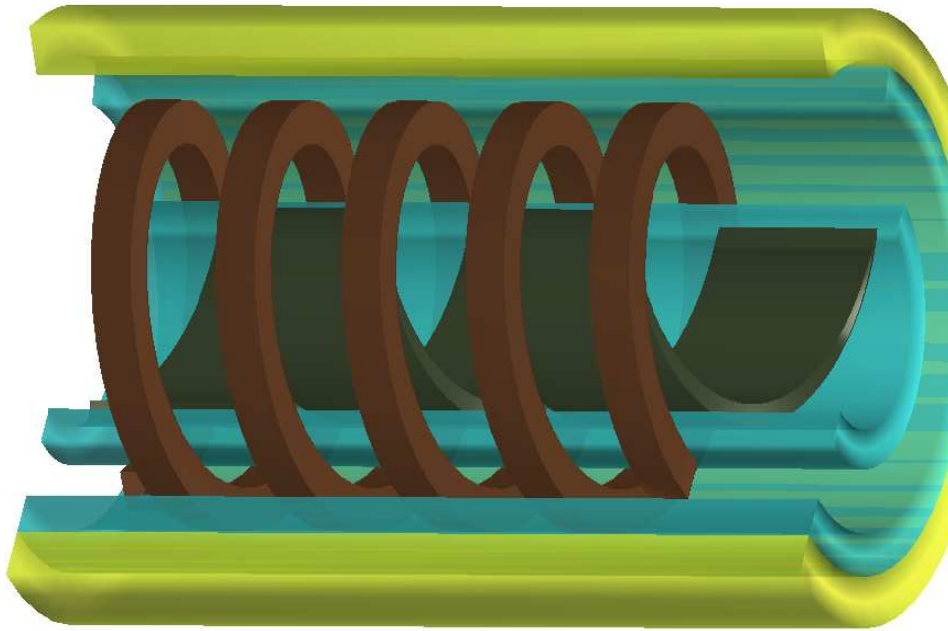
	FDTD 170	FDTD 110	HFDTD 170	HFDTD 110
Rozmiar	1.25M	724K	0.79	0.48
nnz	4.8M	2.8	3.57	2.12
it/s	16.7	27.5	22.5	37
Δt	4.71e-15	4.71e-15	1.82e-14	1.82e-14
Czas symulacji	6h 40min	4h	74min	45min



RYSUNEK 4.21: Unormowana stała propagacji przewodnicy z linią spiralną, porównana z wynikami eksperymentalnymi i obliczonymi Metodą Dopasowania Rodzajów (MM) [110]

z elementów większego projektu, na który składały się badania eksperymentalne, budowa modeli obwodowych i dyskutowana poniżej analiza pełnofalowa. Celem całego projektu było określenie wpływu zewnętrznego pola elektromagnetycznego o niskiej częstotliwości, wzbudzanego podczas badania metodą rezonansu magnetycznego (MRI) na pole wewnątrz linii [86, 87]. Z kolei symulacja elektromagnetyczna miała na celu wyznaczenie parametrów propagacji oraz sprzężenia z polem zewnętrznym. Przykładową strukturę, zbliżoną do testowanych w [87], zdefiniowano następująco:

- Spirala wewnętrzna: promień wewnętrzny: 0.25mm, zewnętrzny 0.45mm, skok 0.45mm i prześwit 0.05mm.
- Spirala zewnętrzna: promień wewnętrzny: 0.675mm, zewnętrzny 0.9mm, skok 1.075mm i prześwit 0.325mm.
- Wewnętrzny dielektryk - przenikalność względna $\epsilon_r = 4$, szczelnie wypełnia przestrzeń między spiralami.
- Dielektryk zewnętrzny, pierścień o grubości 0.15mm, przylegający do zewnętrznej spirali.



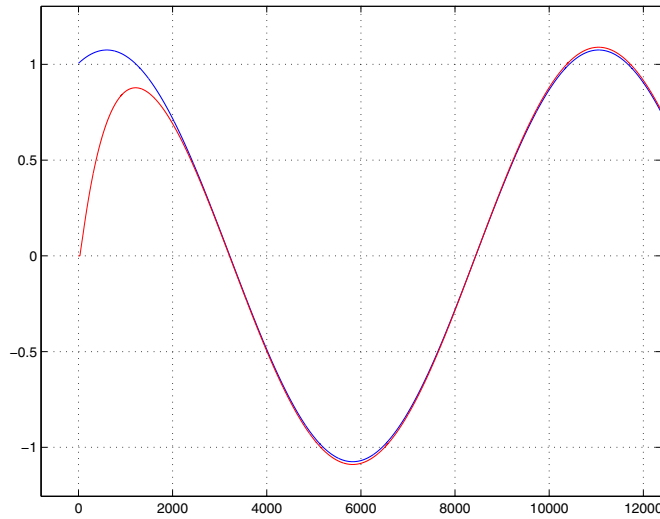
RYSUNEK 4.22: Szkic analizowanej spirali. Widoczne są metalowe linie helikalne, oraz supporty dielektryczne (zaznaczone na niebiesko). Kolorem żółtym zaznaczono zewnętrzną warstwę będącą tkanką mięśniową.

Taki układ umieszczony jest wewnątrz tkanki mięśniowej. Jej parametry elektryczne założono jako $\epsilon_r = 90$, $\sigma = 0.75$, natomiast grubość 0.2mm. Duża stratność materiału pozwoliła zrezygnować z warunków absorpcyjnych na brzegu dziedziiny.

Struktura została zdyskretyzowana przy pomocy siatki różnicowej 50 na 50 oczek w przekroju poprzecznym i 1660 oczek wzdłuż kierunku propagacji. Rozmiar oczka był równy $25\mu m$ zarówno w kierunku ρ jak i z . Obszar o długości 80 oczek z każdej strony stanowiły porty w postaci linii koncentrycznej. Właściwa spirala miała zatem długość 1500 oczek, czyli 3.75cm. Dla pobudzenia o częstotliwości 64MHz, zakładając v/c około 7 (oszacowana) daje to długość elektryczną prawie 20° . Warto zwrócić uwagę, że tak zdefiniowana siatka ma w przybliżeniu 27000 węzłów na długość fali. Zdefiniowanie tak długiej struktury było konieczne, aby możliwe było zaobserwowanie zmiany fazy sygnału, konieczne do ekstrakcji stałej propagacji, a także aby zminimalizować wpływ nieciągłości na styku port-linia. W opisanym konfiguracji czysta analiza FDTD jest praktycznie niewykonalna. Do poprawy wydajności użyto jednocześnie dwóch technik: rozwinięć funkcyjnych oraz innego sposobu ekstrakcji stanu ustalonego [123].

Ekstrakcja stanu ustalonego

Niezbędne do obliczenia poszukiwanych parametrów linii są amplitudy zespolone pól w wybranych przekrojach. Przy ustalonej częstotliwości pobudzenia i stałej Δt wynikającej z gęstości siatki na jeden okres pobudzenia przypada ponad 400 tysięcy iteracji. Jednocześnie stan ustalony struktura osiąga po około $1/5$ okresu fali pobudzającej, co widoczne jest na rys. 4.23. Z tego powodu zamiast zastosować typową technikę ekstrakcji amplitud zespolonych w drodze dyskretnej transformaty Fouriera, zdecydowano się użyć metodą opisaną



RYSUNEK 4.23: Wykres wartości chwilowej próbki pola elektrycznego w porcie wyjściowym w funkcji liczby iteracji (linia czerwona). Na niebiesko zaznaczono ekstrapolowaną odpowiedź w stanie ustalonym, otrzymaną poprzez analizę FFT na sygnale o długości równej 10 okresom pobudzenia. Widać, że oba przebiegi pokrywają się począwszy od około 1/5 okresu. Wykreślone przebiegi zostały zdecydowane w stosunku 1:50.

w [123]. W stanie ustalonym, w dowolnym punkcie siatki sygnał ma postać

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4.3)$$

gdzie ω jest znane, nie jest natomiast znana amplituda A i faza φ_0 . Obie wielkości można znaleźć rozwiązując równanie nieliniowe

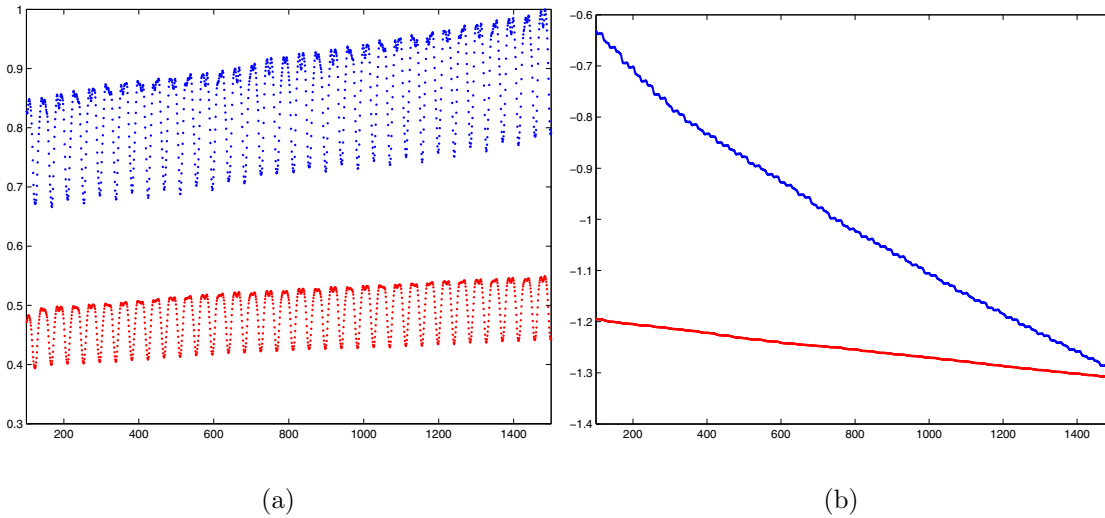
$$A \cos(\omega t_0 + \varphi_0) = s(t_0) \quad (4.4a)$$

$$A \cos(\omega t_1 + \varphi_0) = s(t_1) \quad (4.4b)$$

Na podstawie próbek czasowych sygnału $s(t_0)$ i $s(t_1)$ i znając ich wzajemną odległość (w czasie) można obliczyć amplitudy zespolone pól w interesujących miejscach. Dla potrzeb ekstrakcji stałej propagacji oraz poziomu sprzężenia części wewnętrznej i zewnętrznej linii obliczono amplitudy zespolone wzdłuż całej prowadnicy, zarówno pomiędzy spiralami, jak i w pobliżu zewnętrznej granicy dziedzin. Punkty czasowe tak dobrano, że różnica w fazie między $s(t_0)$ i $s(t_1)$ wynosiła 60 stopni. W ten sposób liczba wykonanych iteracji odpowiadała analizie przez około 1/4 okresu fali pobudzającej.

Analiza hybrydowa

Rozwinięcia harmoniczne w liczbie 5 funkcji w kierunku φ zastosowano dla punktów $\rho < 7\Delta\rho$, obszaru wewnątrz spirali $20\Delta\rho < \rho < 24\Delta\rho$ oraz części zewnętrznej $\rho > 40\Delta\rho$. W ten sposób niezmodyfikowana warstwa buforowa między spiralami a obszarem rozwinięć miała grubość około 3 warstw. Taka konfiguracja pozwoliła dwukrotnie zredukować liczbę zmiennych i pięciokrotnie wydłużyć krok czasowy. Warto zwrócić uwagę, że sam proces generowania macierzy wymagał zastosowania dedykowanych procedur pisanych w językach



RYSUNEK 4.24: Amplituda (a) i faza pola wzdłuż prowadnicy (b). Na niebiesko zaznaczono składową E_ρ , natomiast H_ϕ na czerwono.

kompilowanych. Przy takich rozmiarach problemu wyjściowej macierz projekcyjna zajmuje w pamięci RAM około 400MB. Jawne zdefiniowanie dwóch takich macierzy - dla pola elektrycznego i magnetycznego oraz jednocześnie trójwymiarowego operatora różnicowego wymagałoby użycia ogromnych zasobów na etapie przygotowania symulacji. Dzięki wykorzystaniu częściowej (istnienie spirali sprawia, że struktura nie daje się podzielić na identyczne fragmenty) powtarzalności struktury i napisania większości procedur w języku C++ udało się realizować tę wymagającą operację na komputerze PC z pamięcią 1GB. Całkowity czas przygotowania symulacji FDTD wynosił około 15 minut.

Wykonano także drugą analizę, zmniejszając liczbę funkcji w rozwijanych obszarach do jednej, co było równoważne wymuszeniu zerowej zmienności kątowej pól w rozwijanych obszarach. Jak widać, ograniczenie to nie wpłynęło radykalnie na wyznaczoną stałą propagacji, natomiast dwukrotnie przyspieszyło analizę. Sformułowanie takie powoduje jednak znaczną nieciągłość pola na granicy PEE-FDTD związaną ze zwarciem wyższych rodzajów. Na rysunku 4.25 porównano wykresy pól dla obu przypadków.

TABELA 4.20: Parametry symulacji linii z zastosowaniem różnej liczby funkcji bazowych w rozwijanych obszarach

	1 funkcja	5 funkcji	FDTD
Rozmiar problemu	6.46M	6.85M	11.3M
Elementy niezerowe macierzy	13.6M	17M	32M
it/s	4.04	3.3	2
Δt	4.17e-14	2.91e-14	4.29e-15
Liczba wykonanych iteracji	82K	120K	800K
Czas symulacji	5godz. 40min	10godz	4 dni 15 godz.

Ekstrakcja stałej propagacji

Do ekstrakcji stałej propagacji wykorzystano algorytm opisany w [34], zmodyfikowany na potrzeby struktury quasi-periodycznej. Wiadomo [20], że w strukturze periodycznej amplituda rozchodzącej się fali może zostać opisana zależnością

$$F(z) = Ae^{\gamma z} \sum_n \cos\left(\frac{2n\pi}{D}\right) \quad (4.5)$$

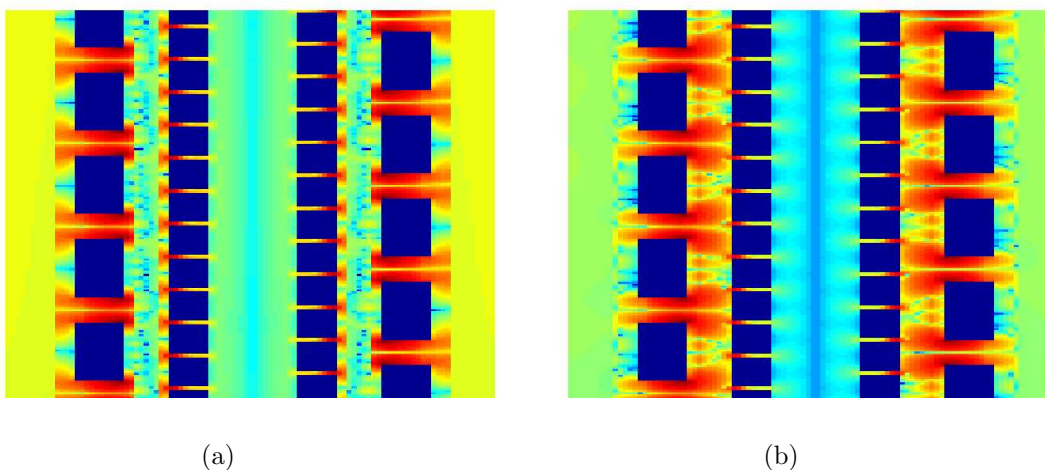
gdzie D jest okresem struktury. Każdy element szeregu (4.5) nazywany jest tzw. modem Floquet'a. Z punktu widzenia omawianej analizy istotne są dwa fakty: po pierwsze - dla odległości równej okresowi struktury można pominąć wpływ szeregu. Po drugie: średnia wartość szeregu równa jest zeru, czyli dla odpowiednio długiej struktury można otrzymać γ poprzez uśrednienie lokalnie wyznaczonych stałych propagacji. W rozważanym przypadku struktura nie była okresowa, zatem trudno było wyodrębnić położenia dla których był spełniony pierwszy z warunków. Wykorzystano jednak drugą zależność. Stałą propagacji wyznaczono lokalnie korzystając z zależności [34]

$$\gamma(z) = \sqrt{\frac{\frac{dE(z)}{dz} \frac{dH(z)}{dz}}{E(z)H(z)}} \quad (4.6)$$

Założono, że wartość średnia tak wyznaczonego γ będzie zbliżona do szukanej stałej propagacji. Jako $E(z)$ i $H(z)$ wykorzystano amplitudy zespolone pól elektrycznego i magnetycznego. Wykres części urojonej γ , uśrednionej na długości 100 próbek, wykreślono na rys. 4.26. Porównano tam rozwiązania dwóch symulacji: z 5 funkcjami w obszarach PEE bazowymi oraz tylko z jedną. Ograniczenie przestrzeni rozwiązań w kierunku φ do 1 funkcji oznaczało wymuszenie braku zmienności kątowej pól w modyfikowanych obszarach. Jak widać na rys. 4.26 różnice w wyznaczonej stałej propagacji są niewielkie, jednak wyraźnie widać tendencję malejącą β . Powodem takiego zachowania się charakterystyki może być wzbudzenie większej ilości rodzajów, które są tłumione wraz z odległością.

Podsumowanie

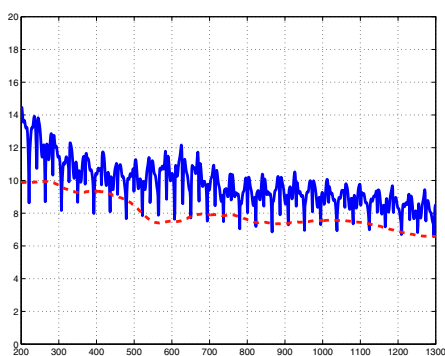
W przedstawiony sposób przeprowadzono całą serię symulacji podobnych struktur. Uzyskane wyniki pozwalały wyznaczać pozostałe parametry elektryczne. Przeprowadzone pomiary pozytywnie weryfikują wyniki przeprowadzonych symulacji [86]. Należy podkreślić, że przy takich rozmiarach problemu ogromne znaczenie odgrywają szczegóły implementacyjne. W szczególności cały napisany kod nastawiony jest na optymalizację zużycia pamięci w fazie preprocessingu, co praktycznie wyklucza możliwość użycia środowiska MATLAB.



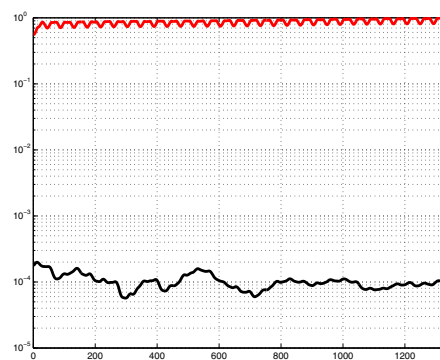
(a)

(b)

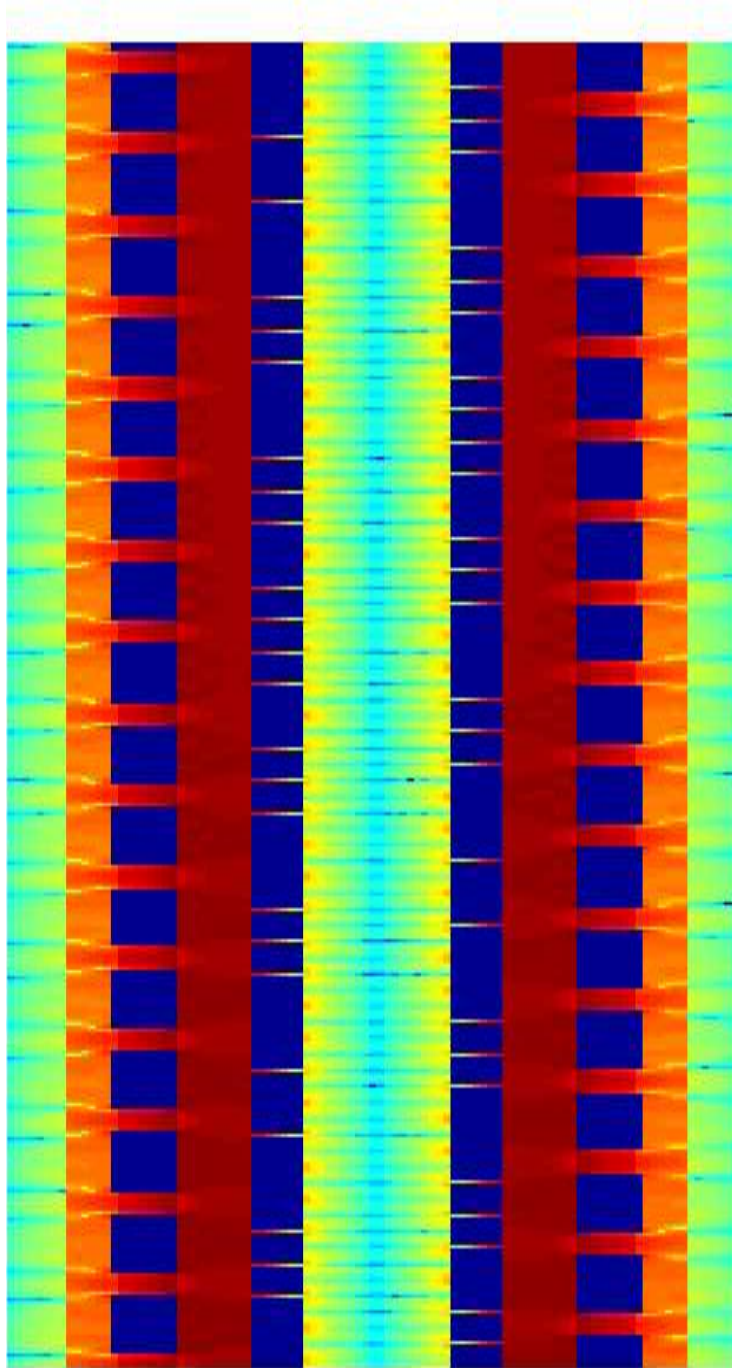
RYSUNEK 4.25: Rozkłady pola uzyskane w przypadku zastosowania 1 (a) i 5 funkcji bazowych (b). Wyraźnie widoczne są nieciągłości w obszarze pomiędzy spiralami.



RYSUNEK 4.26: Stała propagacji wyznaczona wzdłuż struktury na podstawie E_ρ i H_φ . Liniją przerywaną zaznaczono β wyznaczone dla analizy z uwzględnieniem tylko 1 rodzaju pomiędzy spiralami.



RYSUNEK 4.27: Amplituda pola E_z wewnątrz (na czerwono) i na zewnątrz spirali (na czarno).



RYSUNEK 4.28: Całkowite pole E_ρ w przekroju poprzecznym spirali. Długość pokazanego fragmentu jest równa 500 oczek.

Rozdział 5

Podsumowanie

W pracy przedstawiono koncepcje zastosowania projekcji Rayleigha-Ritza w przestrzeni \mathcal{R}^n do redukcji rozmiaru i zwiększenia wydajności rozwiązywania problemów elektrodynamicznych zdyskretyzowanych przy pomocy Metody Różnic Skończonych. Kluczowym elementem opisanych rozwiązań jest tworzenie podprzestrzeni projekcyjnych, w oparciu o znane a priori własności rozwiązania. Od podprzestrzeni tych wymaga się nie tylko dobrego przybliżania szukanych wielkości elektromagnetycznych, co się przejawia w redukcji rozmiaru problemu. Rzutowanie operatora na podprzestrzeń wpływa na wiele czynników związanych z wydajnością, takich jak norma czy gęstość macierzy. Praktyczna realizacja algorytmów dyskretnej projekcji wymagała prac zarówno na płaszczyźnie matematycznej jak i implementacyjnej.

Wykorzystanie techniki Rayleigha-Ritza do rzutowania operatorów i bardzo przejrzysty sposób tworzenia podprzestrzeni rzutowych gwarantuje, że zastosowane sformułowania nie pogarszają uniwersalności metody. W szczególności uzyskano bardzo przejrzystą definicję metod hybrydowych jednocześnie z zagwarantowaniem ich stabilności. Zmiana reprezentacji pól elektromagnetycznych w określonych rejonach dziedziny, pozwala dodatkowo efektywnie ekstrahować takie wielkości jak amplitudy wybranych modów bez konieczności postprocesingu i dodatkowego narzutu obliczeniowego, co z kolei umożliwia wydajną implementację warunków brzegowych bazujących na rozwiązaniach analitycznych. W pracy udowodniono przytoczone we wstępie tezy:

- Zademonstrowano możliwość wykorzystania znanych cech rozwiązania do konstrukcji przestrzeni rzutowych. Wykorzystano wektory bazowe zbudowane w oparciu o próbki funkcji harmonicznych, co pozwoliło odtworzyć metodę PEE w dziedzinie dyskretnej. Pokazano także wydajne metody efektywnego rozrzedzania siatki w jednorodnych rejonach w oparciu o próbki wielomianów Legendre'a. Innym przykładem wykorzystania znanych a priori cech rozwiązania była budowa rozwinięć modowych w celu zastosowania analitycznych warunków brzegowych.
- Liczne przykłady stosowania techniki PEE w przestrzeni dyskretnej a także wielomianów Legendre'a pokazują, że poprawa wydajności nie musi odbywać się kosztem dokładności, przynajmniej w strukturach o pewnej jednorodności lub symetrii.
- Formalizm dyskretnej projekcji wykorzystano jako ogólne ramy do tworzenia algorytmów hybrydowych. Zademonstrowano łączenie dziedziny FD z rozwinięciami falkowymi, PEE a także innymi, arbitralnie dobranymi funkcjami.

Proponowane kierunki rozwoju

Do ważniejszych elementów wymagających dopracowania należy warstwa implementacyjna oraz analiza problemów związanych z technikami równoważnymi do subgriddingu.

Subgridding

Istnieje wiele algorytmów łączenia siatek o różnych gęstościach w ramach jednej dziedziny obliczeniowej. Formalizm rzutowy, zaproponowany w niniejszej pracy wydaje się naturalnym spoiwem łączącym różne techniki subgriddingu, szczególnie, że gwarantowana jest stabilność tak utworzonego algorytmu. Dotychczasowe wyniki nie są jednak w pełni zadowalające. Rozwiązania problemu mogłaby dostarczyć analiza rzutowania w przestrzeni ciągłej, w podobny bowiem sposób rozwiązano zagadnienie rzutowania operatora drugiego rzędu prowadzące do rozrzedzenia siatki. Kwestia ta pozostaje na razie otwarta.

Zagadnienia implementacyjne

Zdefiniowanie otwartego algorytmu FDTD do postaci macierzowej powoduje około 2-krotny spadek wydajności. Z implementacyjnego punktu widzenia, użycie klasycznego sformułowania FDTD wymaga 5 operacji zmiennoprzecinkowych i 5 odwołań do pamięci na jedną zmienną. Ta sama operacja zapisana w formie macierzy wymaga 7 operacji zmiennoprzecinkowych i aż 8 odwołań do pamięci. Zatem zastosowanie metod projekcji, musi dać przyspieszenie co najmniej dwukrotne aby skompensować straty związane macierzowym zapisem problemu. Dodatkowo, zmniejszaniu rozmiaru macierzy często towarzyszy jej gęstnienie. Liczba niezerowych elementów macierzy ma bezpośredni związek z czasem pojedynczej operacji mnożenia macierz-vektor. Dlatego wymaga się od macierzy projekcyjnych zarówno dobrego przybliżenia rozwiązania jak i budowy, która powoduje możliwie najrzadszą macierz po projekcji. Problemy te są mniej widoczne przy analizie w dziedzinie częstotliwości, w szczególności zagadnień własnych, gdzie rozmiar macierzy znacznie bardziej wpływa na czas obliczeń niż jej gęstość.

Problemy wydajnościowe były główną przyczyną rezygnacji, czy przynajmniej ograniczenia wykorzystania środowiska MATLAB na korzyść języków kompilowanych. Nadmienić też należy, że trwają prace dotyczące poprawy wydajności obliczeniowej sformułowania macierzowego, bazujące na własnościach macierzy powstałych wskutek zastosowania omówionych metod.

Sylwetka autora

Michał Wiktor ukończył wydział Elektroniki Politechniki Gdańskiej w 2000 roku. Następnie rozpoczął studia doktoranckie pod kierunkiem prof. Michała Mrozowskiego. Jego zainteresowania naukowe dotyczą głównie wydajnych algorytmów obliczeniowych bazujących na Metodzie Różnic Skończonych, włączając w to zagadnienia przedstawione w niniejszej pracy. Autor interesuje się także implementacją komputerową algorytmów numerycznych. W trakcie pracy nad niniejszą rozprawą brał udział w projekcie związanym z badaniem zagrożeń jakim podlegają osoby w wszczepionymi rozrusznikami serca podczas badań MRI. Projekt ten był wykonywany we współpracy z firmą Medtronic Inc. Autor brał także udział w testowaniu akceleratora FDTD, wykorzystującego procesory graficzne do obliczeń elektromagnetycznych, zbudowanego przez firmę Acceleware Inc. Jest współautorem 3 publikacji w czasopiśmie z listy filadelfijskiej [46, 113, 115], oraz 5 komunikatów konferencyjnych [86, 111, 112, 114, 116]. Kolejna publikacja jest obecnie recenzowana [87], w końcowej fazie przygotowań jest natomiast artykuł w znacznej części pokrywający zagadnienia opisane w niniejszej pracy [117].

Podziękowania

Pragnę podziękować promotorowi Profesorowi Michałowi Mrozowskiemu za doskonałe warunki do pracy naukowej, inspirujące wskazówki bez których moja praca utknęłaby w jednej z licznych ślepych uliczek wiedzy i jednocześnie dużą swobodę, dzięki czemu mogłem osobiście przekonać się, że nie każda droga prowadzi do celu.

Szczególne podziękowania kieruję do Piotra Kowalczyka za ogromny wkład w ostateczną formę niniejszej pracy, wnikliwą recenzję i wytrwałe śledzenie błędów i niekonsekwencji.

Wyrazy wdzięczności pragnę przekazać także Babci i Dziadkowi – za nieustającą wiarę w powodzenie, Rodzicom i Teściom za poświęcony czas oraz Magdzie i Jasiowi za dzielne znoszenie nieobecności męża i taty.

Bibliografia

- [1] S. Amari, U. Rosenberg, i R. Wu, "In-line Pseudoelliptic Band-Reject Filters With Nonresonating Nodes and/or Phase Shifts," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 54, no. 1, styczeń 2006, str. 428 – 436.
- [2] D. Arnold, "An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements," *SIAM Journal Numer. Anal.*, vol. 19, 1982, str. 742–760.
- [3] D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, i L. Marini, "Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems," *SIAM Journal Numer. Anal.*, vol. 39, 2002, str. 1479–1779.
- [4] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, i H. Vorst, *Templates for the Solution of Sparse Eigenvalue Problems*. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [5] D. Baillargeat, S. Verdeyme, M. Aubourg, i P. Guillon, "CAD Applying the Finite-Element Method for Dielectric-Resonator Filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 1, styczeń 1998, str. 10 – 17.
- [6] D. Baillargeat, S. Verdeyme, i P. Guillon, "Slotted Dielectric Resonators for Rigorous Design of a Four-poles Dual Mode Filter," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, no. 10, październik 1994, str. 332 – 334.
- [7] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*. New York: Willey & sons, 1989.
- [8] R. Barret *et al.*, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [9] K. Beilenhoff, W. Heinrich, i H. L. Hartnagel, "Improved Finite-Difference Formulation in Frequency Domain for Three-Dimensional Scattering Problems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, no. 3, maj 1992, str. 540–546.
- [10] J. P. Berenger, "Making Use of the PML Absorbing Boundary Condition in Coupling and Scattering FDTD Computer Codes," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 45, no. 2, maj 2003, str. 189 – 197.
- [11] A. D. Berk, "Variational Principles for Electromagnetic Resonators and Waveguides," *IRE Transaction on Antennas and Propagation*, kwiecień 1956, str. 104–111.
- [12] R. C. Booton, *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*. Wiley-Interscience, 1992.

- [13] G. J. Borse, *Numerical methods with Matlab*. Int. Edition.: PWS Publishing Company, 1997.
- [14] A. C. Cangellaris, M. Celik, S. Pasha, i L. Zhao, “Electromagnetic Model Order Reduction for System Level Modelling,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 6, czerwiec 1999, str. 840–850.
- [15] Q. Cao i R. Mittra, “Multiple Image Technique and Anisotropic Perfectly Matched Layer in Implementation of MRTD Scheme for Boundary Truncations of Microwave structures,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 6, czerwiec 2002, str. 1579–1589.
- [16] M. Celuch-Marcysiak, “Demonstration and Suppression of Numerical Divergence Errors in FDTD Analysis of Practical Microwave Problems,” in *Microwave Symposium Digest, 2002 IEEE MTT-S International*, vol. 2, 2002, str. 751–754.
- [17] A. Chaigne i A. Askenfelt, “Numerical Simulations of Piano Strings, part I,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 95, luty 1994, str. 1112–1118.
- [18] A. Chaigne i A. Askenfelt, “Numerical Simulations of Piano Strings, part II,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 95, maj 1994, str. 1631–1640.
- [19] Y. Chen, R. Mittra, i P. Harms, “Finite Difference Time-Domain Algorithm for Solving Maxwell’s Equations in Rotationally Symmetric Geometries,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 44, no. 6, czerwiec 1996, str. 832–839.
- [20] R. E. Colin, *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*. Warszawa: WNT, 1966.
- [21] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [22] M. Dehler i T. Weiland, “A new Spectral Technique for the Calculation of Eigenvalues in Curvilinear Coordinates,” *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 30, no. 5, wrzesień 1994, str. 3574–3577.
- [23] H. Derudder, F. Olyslanger, D. D. Zutter, i S. V. den Berghe, “Efficient Mode-Matching Analysis of Discontinuities in Finite Planar Substrates Using Perfectly Matched Layers,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 2, luty 2001, str. 185 – 195.
- [24] S. Dey i R. Mittra, “A Locally Conformal Finite Difference Time Domain Algorithm for Modelling Curved Three Dimensional Perfectly Conducting Objects,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 7, no. 9, wrzesień 1997, str. 273–275.
- [25] T. Dongaru i L. Carin, “Application of Haar Wavelet Based Multiresolution Time Domain Schemes to Electromagnetic Scattering Problems,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 6, czerwiec 2002, str. 774–784.
- [26] F. Ebeling, R. Klatt, F. Krawczyk, E. Lawinsky, T. Weiland, S. G. Wipf, B. Steffen, T. Barts, M. J. Browman, R. Cooper, H. Deaven, i G. Rodenz, “The 3-D MAFIA Group of Electromagnetic Codes,” *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 25, no. 4, kwiecień 1989, str. 2962 – 2964.

- [27] F. Fernandez i Y. Lu, *Microwave and optical waveguide analysis by the Finite Element Method*, ser. Research Studies Press. Somerset, England: Willey and Sons, 1996.
- [28] M. Fujii i W. Hofer, “A Three-Dimensional Haar-Wavelet-Based Multiresolution Analysis Similar to the FDTD Method - Derivation and Application,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 12, grudzień 1998, str. 2463–2475.
- [29] M. Fujii i W. Hofer, “Dispersion of Time Domain Wavelet Galerkin Method Based on Daubechies’ Compactly Supported Scaling Functions with Three and Four Vanishing Moments,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 10, no. 4, kwiecień 2000, str. 125 – 127.
- [30] S. Gedney, “An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 12, grudzień 1996, str. 1630–1639.
- [31] J. Głazunow, *Metody wariacyjne rozwiązywania równań różniczkowych*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2000.
- [32] G. H. Golub i C. F. van Loan, *Matrix computations, 3rd. edition*. John Hopkins, 1996.
- [33] R. Gopinath, J. E. Odegard, i C. S. Burrus, “Optimal Wavelet Representation of Signals and the Wavelet Sampling Theorem,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 41, no. 4, kwiecień 1994, str. 262 – 277.
- [34] W. K. Gwarek i M. Celuch-Marcysiak, “Wide-Band S-Parameter Extraction From FDTD Simulations for Propagating and Evanescent Modes in Inhomogeneous Guides,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 8, sierpień 2003, str. 1920–1928.
- [35] W. K. Gwarek, T. Morawski, i C. Mroczkowski, “Application of the FDTD Method to the Analysis of Circuits Described by the Two Dimensional Vector Wave Equation,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 2, luty 1993, str. 311–317.
- [36] R. F. Harrington, *Field Computation by Method of Moments*. New York: The MacMillan Company, 1968.
- [37] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. International Edition: McGraw Hill, 1993.
- [38] Y. Hua i T. Sarkar, “Generalized Pencil-of-Function Method for Extracting Poles of an EM System from Its Transient Response,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 2, luty 1989, str. 229–234.
- [39] N. Kaneda, B. Houshmand, i T. Itoh, “FDTD Analysis of Dielectric Resonators with Curved Surfaces,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 9, wrzesień 1997, str. 1645–1648.

- [40] M. K. Karkkainen i S. A. Tretyakov, "A Class of Analytical Absorbing Boundary Conditions Originating From the Exact Surface Impedance Boundary Condition," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 2, luty 2003, str. 560–563.
- [41] A. Kedzior i J. Krupka, "Application of the Galerkin Method for Determination of Quasi TE/sub 0k/ Mode Frequencies of a Rectangular Cavity Containing a Dielectric Sample," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 82, no. 2, luty 1982, str. 196 – 198.
- [42] G. D. Kondylis, F. D. Flaviis, G. J. Pottie, i T. Itoh, "A Memory Efficient Formulation of the Finite-Difference-Time Domain Method for the Solution of Maxwell's Equations," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 7, lipiec 2001, str. 1310–1320.
- [43] C. L. Kory, "Investigation of Fully Three-Dimensional Helical RF Field Effects on TWT Beam Circuit Interaction," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 48, no. 8, sierpień 2001, str. 1718 – 1726.
- [44] C. L. Kory i J. A. Dayton, "Accurate Cold-Test Model of Helical TWT Slow-Wave Circuits," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 45, no. 4, kwiecień 1998, str. 966 – 971.
- [45] P. Kowalczyk, "Analityczne Techniki Redukcji Błędu Dyspersji Numerycznej w Metodzie Różnic Skończonych w Zagadnieniach Elektromagnetyzmu," in *II Krajowa Konferencja Elektroniki, Kołobrzeg 2003*, vol. 2, 2003.
- [46] P. Kowalczyk, M. Wiktor, i M. Mrozowski, "Efficient Finite Difference Analysis of Microstructured Optical Fibres," *Optics Express*, vol. 13, no. 25, 2005, p. 10349.
- [47] A. Kreczkowski, T. Rutkowski, i M. Mrozowski, "Fast Modal ABC's in the Hybrid PEE-FDTD Analysis of Waveguide Discontinuities," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 9, no. 5, maj 1999.
- [48] M. Krumpholz i L. Katehi, "MRTD: New Time Domain Schemes Based on Multiresolution Analysis," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 4, kwiecień 1996, str. 555–571.
- [49] M. Krumpholz i P. Russer, "A Field Theoretical Comparison of FDTD and TLM," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, no. 8, sierpień 1995, str. 1935–1990.
- [50] J. Krupka, "Computations of Frequencies and Intrinsic Q Factors of TE/sub 0nm/ Modes of Dielectric Resonators," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 3, marzec 1985, str. 274 – 277.
- [51] J. Krupka, A. Cwikla, M. Mrozowski, R. N. Clarke, i M. E. Tobar, "High Q-factor microwave Fabry-Perot resonator with distributed Bragg reflectors," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 33, no. 9, wrzesień 2005, str. 1443–1451.

- [52] L. Kulas i M. Mrozowski, “Reduced Order Model in FDTD,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 11, no. 10, październik 2001, str. 422–424.
- [53] L. Kulas i M. Mrozowski, “Reduced Order Models of Refined Yee’s Cells,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 4, kwiecień 2003, str. 164 – 166.
- [54] L. Kulas i M. Mrozowski, “Stability of the FDTD Scheme Containing Macromodels,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 14, no. 10, październik 2004, str. 484 – 486.
- [55] L. Kulas i M. Mrozowski, “Low-reflection Subgridding,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, no. 5, maj 2005, str. 1587 – 1592.
- [56] K. S. Kunz i R. J. Lubbers, *Finite Difference Time Domain Method for electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press, 1993.
- [57] R. S. Kwok i S. J. Fiedziuszko, “Helical Ceramic Resonator Structures,” in *Microwave Symposium Digest, 1999 IEEE MTT-S International 13-19 June 1999*, vol. 3, 1999, str. 1033 – 1036.
- [58] R. S. Kwok i S. J. Fiedziuszko, “Dual-Mode Helical Resonators,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, no. 3, maj 2000, str. 474–477.
- [59] R. Lech i J. Mazur, “Propagation in Rectangular Waveguides Periodically Loaded With Cylindrical Posts,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 14, no. 4, kwiecień 2004, str. 177–179.
- [60] J. Lee, R. Lee, i A. Cangellaris, “Time Domain Finite Element Methods,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 3, maj 1997, str. 430–441.
- [61] X. P. Liang i K. A. Zaki, “Modelling of Cylindrical Resonators in Rectangular Waveguides and Cavities,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 12, grudzień 1993, str. 2174–2181.
- [62] D. Lukashevich i P. Russer, “Shift-Inverse Technique in TLM-MOR,” in *20th Annual Review of Progress in Applied Computational Electrodynamics, Syracuse 2004*, vol. 2, 2004, p. S04P18 (CD).
- [63] R. G. Martin, A. Salinas, i R. Bretones, “Time Domain Integral Equation Methods For Transient Analysis,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 34, no. 3, czerwiec 1992, str. 15–23.
- [64] K. Maurin, *Analiza cz. I*, ser. Biblioteka Matematyczna tom 56. Warszawa: PWN, 1998.
- [65] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [66] W. Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, ser. Biblioteka Matematyczna, tom 35. Warszawa: PWN, 1970.

- [67] J. Monsoriu, M. Andres, E. Silvestre, A. Ferrando, i B. Gimeno, "Analysis of Dielectric-Loaded Cavities Using an Orthonormal-Basis Method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 11, listopad 2002, str. 2545–2552.
- [68] M. Mrozowski, "A Hybrid PEE-FDTD Algorithm for Accelerated Time Domain Analysis of Electromagnetic Waves in Shielded Structures," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, no. 10, październik 1994, str. 323 – 325.
- [69] M. Mrozowski, *Eigenfunction Expansion Techniques in the Numerical Analysis of Inhomogeneously Loaded Waveguides and Resonators*, ser. Zeszyt Naukowy PG nr 512. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 1994.
- [70] M. Mrozowski, "Function Expansion Algorithms for the Time Domain Analysis of Shielded Structures Supporting Electromagnetic Waves," *Journal of Numerical Modelling*, vol. 7, kwiecień 1994, str. 77–84.
- [71] M. Mrozowski, "Function Expansion Algorithms for the Time Domain Analysis of Shielded Structures Supporting Electromagnetic Waves," *Journal of Numerical Modelling*, vol. 7, kwiecień 1994, str. 77–84.
- [72] M. Mrozowski, "Stability Condition for the Explicit Algorithms of the Time Domain Analysis of Maxwell's Equations," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, no. 8, sierpień 1994, str. 279–281.
- [73] M. Mrozowski, M. Niedzwiecki, i P. Suchomski, "A Fast Recursive Highly Dispersive Absorbing Boundary Condition Using Time Domain Diakoptics and Laguerre Polynomials," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 5, no. 6, czerwiec 1995, str. 183 – 185.
- [74] M. Mrozowski, M. Niedzwiecki, i P. Suchomski, "Improved Wideband Highly Dispersive Absorbing Boundary Condition," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 12, czerwiec 1996, str. 1109 – 1111.
- [75] M. Mrozowski, M. Okoniewski, i M. A. Stuchly, "Hybrid PEE-FDTD Method for Efficient Field Modelling in Cylindrical Coordinates," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 3, luty 1996, str. 194 – 195.
- [76] A. Navarro i M. Nuez, "FDTD Method coupled with FFT: A generalization to Open Cylindrical Devices," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, no. 4, kwiecień 1994, str. 870 – 874.
- [77] M. Okoniewski, E. Okoniewska, i M. A. Stuchly, "Three-Dimensional Subgridding Algorithm for FDTD," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 3, maj 1997, str. 422–428.
- [78] A. Oliner, "Historical Perspective on Microwave Field Theory," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 9, wrzesień 1984, str. 1022–1045.
- [79] A. Oppenheim i R. Shaffer, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: PWN, 1979.

- [80] J. Osowski i A. Szabatin, *Teoria obwodów*, ser. Podręczniki Akademickie. Warszawa: WNT, 1998.
- [81] G. W. Pan, *Waveletes in Electromagnetics and Device Modelling*. Noboken, NJ: Willey-Interscience, 2003.
- [82] M. Peschke i W. Menzel, “Investigation of Boundary Algorithms for Multiresolution Analysis,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 4, kwiecień 2003, str. 1262–1268.
- [83] O. Podebrad, M. Clemens, i T. Weiland, “New Flexible Subgridding Scheme for the Finite Integration Technique,” *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 39, no. 3, maj 2003, str. 1662–1665.
- [84] P. Przybyszewski, “Fast finite difference numerical techniques for the time and frequency domain solution of electromagnetic problems,” Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, 2001.
- [85] P. Przybyszewski i M. Mrozowski, “A Conductive Wedge in Yee’s Mesh,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, no. 2, luty 1998, str. 66–68.
- [86] P. Przybyszewski, M. Wiktor, i M. Mrozowski, “Modelling of Pacing Lead Electrode Heating in the MRI RF Field,” in *International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, vol. 1, 2006.
- [87] P. Przybyszewski, M. Wiktor, i M. Mrozowski, “Modelling of Pacing Lead Electrode Heating in the MRI RF Field,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility (submitted)*, 2006.
- [88] S. Qi i K. Wu, “Leakage and Resonance Characteristics of Radiating Cylindrical Dielectric Structure Suitable for Use as a Feeder for High-Efficient Omnidirectional/Sectorial Antenna,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 11, listopad 1998, str. 1767 – 1773.
- [89] “QuickWave electromagnetic Simulator,” url: <http://www.qwed.com.pl>.
- [90] C. J. Railton, I. J. Craddock, i J. B. Schneider, “The Analysis of General Two-dimensional PEC Structures Using a Modified CPFDTD Algorithm,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 10, październik 1996, str. 1728 – 1733.
- [91] S. M. Rao i D. R. Wilton, “Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, no. 1, styczeń 1991, str. 56–61.
- [92] E. S. Raymond, *The art of UNIX programming*. Warszawa: Helion, 2003.
- [93] H. Rogier i D. D. Zutter, “Berenger and Leaky Modes in Optical Fibres Terminated with a Perfectly Matched Layer,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 20, no. 7, lipiec 2002, str. 1141 – 1148.

- [94] J. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
- [95] M. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics, 2nd ed.* CRC Press, 2001.
- [96] M. Salazar-Palma, T. K. Sarkar, L.-E. Garcia-Castillo, T. Roy, i A. Djordjevic, *Iterative and self adaptative finite elements in electromagnetic modelling*. London: Artech House, 1998.
- [97] C. D. Sarris i L. Katehi, “An Efficient Numerical Interface Between FDTD and Haar MRTD - Formulation and Applications,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 4, kwiecień 2003, str. 1146–1156.
- [98] E. Schweig i W. B. Bridges, “Computer Analysis of Dielectric Waveguides: A Finite-Difference Method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 9, maj 1984, str. 531–541.
- [99] B. N. Sheehan, “ENOR: Model Order Reduction of RLC Circuits Using Nodal Equation for Efficient Factorization,” in *IEEE 36th conference on Design Automat.*, 1999.
- [100] K. L. Shlager i J. B. Schneider, “Comparison of the Dispersion Properties of Higher Order FDTD Schemes and Equivalent-sized MRTD Schemes,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 4, kwiecień 2004, str. 1095 – 1104.
- [101] P. Steffen, P. N. Heller, R. A. Gopinath, i C. S. Burrus, “Theory of Regular M-band Wavelet Bases,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, grudzień 1993, str. 3497 – 3511.
- [102] B. Stupfel i R. Mittra, “A Theoretical Study of Numerical Absorbing Boundary Conditions,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 4, maj 1995, str. 478–487.
- [103] A. Taflove, *Computational electrodynamics FDTD method, 2nd edition*. Norwood: Artech House, 2000.
- [104] A. Taflove i S. Hagness, *Computational electrodynamics. The Finite Difference Time Domain Method 3rd edition*. Norwood: Artech House, 2005.
- [105] V. Thomee, “From Finite Differences to Finite Elements a Short History of Numerical Analysis of Partial Differential Equations,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, no. 1-2, maj 2001.
- [106] B. Trapp, H. Munteanu, R. Schuhmann, T. Weiland, i D. Ioan, “Eigenvalue Computation by Means of a Tree-Cotree Filtering Technique,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, no. 2, maj 2002, str. 445–448.
- [107] T. Weiland, “Three Dimensional Resonator Mode Computation by Finite Difference Method,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 6, listopad 1985, str. 2317–2320.
- [108] T. Weiland *et al.*, “Maxwells’s Grid Equations,” *Frequenz*, vol. 44, styczeń 1990, str. 9–15.

- [109] L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*. New York: McGraw Hill, 1962.
- [110] T. Wessel-Berg, “CAD of Tape Helix Circuits for Travelling Wave Tubes by Convolution Methods,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 51, no. 11, listopad 2004, str. 1918–1927.
- [111] M. Wiktor, P. Kowalczyk, i M. Mrozowski, “Approximate Analytical Boundary Conditions for Efficient Finite Difference Frequency Domain Simulations in Cylindrical Coordinates,” in *wysłane na międzynarodową konferencję MIKON 2006*, 2006.
- [112] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Increasing Accuracy of Finite Difference Methods in Nonorthogonal Irregular Grids,” in *Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2002. 14th International Conference on*, vol. 2, 2002, str. 533 – 536.
- [113] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Efficient Analysis of Waveguide Components Using a Hybrid PEE-FDTD Algorithm,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 9, wrzesień 2003, str. 396–398.
- [114] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Discrete projection for Finite Difference Methods,” in *20th Annual Review of Progress in Applied Computational Electrodynamics, Syracuse 2004*, vol. 2, 2004, p. S04P08 (CD).
- [115] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Fast Numerical Analysis of Dielectric Resonators with Perturbed Rotational Symmetry,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 15, no. 9, wrzesień 2004, str. 516–518.
- [116] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Hybrid Analysis of Microwave Components in Cylindrical Coordinates with Function Expansion in Subdomains,” in *Microwaves, Radar and Wireless Communications, 2004. MIKON-2004. 15th International Conference on*, vol. 2, 2004, str. 706 – 709.
- [117] M. Wiktor i M. Mrozowski, “Discrete Projection Framework for Hybrid Algorithms in Finite Difference Method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Przygotowywany do publikacji.
- [118] J. C. Wiltse, “History of Millimeter and Submillimeter Waves,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 9, 1984, str. 1127–1140.
- [119] “XFDTD Electromagnetic simulator,” url: <http://www.remcom.com>.
- [120] F. Xu i K. Wu, “Domain Decomposition FDTD Algorithm Combining with Numerical TL Calibration Technique for Parameter Extraction of Substrate Integrated Circuits,” in *Microwave Symposium Digest, 2005 IEEE MTT-S Dallas*, 2005.
- [121] K. S. Yee, “Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell’s equation in Isotropic Media,” *IEEE Transactions of Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, maj 1966, str. 302–307.
- [122] T. Yu i B. Zhou, “A Memory-Efficient FDTD Algorithm for Solving Maxwell Equations in Cylindrical Grids,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 5, maj 2004, str. 1382 – 1384.

- [123] H. Zhao, S. Croizer, i F. Liu, “A high Definition, Finite Difference Time Domain Method,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 27, 2003, str. 409–419.
- [124] S. Zhenhai, S. Zhongxiang, H. He, i W. Guowei, “A Generalized Higher Order Finite-Difference Time-Domain Method and its Application in Guided-Wave Problems,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 3, maj 2003, str. 856 – 861.

Copyright note / Prawo rozpowszechniania

Niniejszym wyrażam zgodę na wykorzystanie wyników mojej pracy, w tym tabel i rysunków, w pracach badawczych i publikacjach przygotowywanych przez pracowników Politechniki Gdańskiej lub pod ich kierownictwem. Wykorzystanie wyników wymaga wskazania niniejszej rozprawy doktorskiej jako źródła.