

ZASTOSOWANIA CAŁKI PODWÓJNEJ W MECHANICE

Niech $\varrho = \varrho(x, y)$ będzie dana ciągłą gęstością powierzchniową masy obszaru $\mathcal{D}$.

- Masa obszaru $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int \varrho(x, y) \, dx dy$$

- Momenty statyczne obszaru $\mathcal{D}$ względem osi układu:

$$\mathcal{M}_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int y \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

$$\mathcal{M}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int x \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

- Współrzędne środka ciężkości obszaru $\mathcal{D}$:

$$x_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{M}_Y}{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{D}} \int x \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

$$y_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{M}_X}{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{D}} \int y \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

- Momenty bezwładności obszaru $\mathcal{D}$ względem osi układu:

$$\mathcal{I}_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int y^2 \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

$$\mathcal{I}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int x^2 \, \varrho(x, y) \, dx dy$$

- Moment bezwładności obszaru $\mathcal{D}$ względem początku układu:

$$\mathcal{I}_O \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \int (x^2 + y^2) \, \varrho(x, y) \, dx dy$$