Wybrane definicje i twierdzenia

Twierdzenie

Dla istnienia granicy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ potrzeba i wystarcza, żeby istniała granica lewostronna i prawostronna i żeby były one równe

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \; .$$

Definicja(*ciągłość funkcji w punkcie*)

Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \; .$$

Uwaga

Nieciągłość funkcji można badać jedynie w punktach należących do jej dziedziny.

Definicja

- Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$$

  lub

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0) \; ,$$

  a granice te istnieją i są skończone.

  Może być to nieciągłość typu "skok":

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \; ,$$

  lub typu "luka":

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0) \; ,$$

- Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, jeżeli co najmniej jedna z granic $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.

TWIERDZENIE

Jeśli funkcje f i g mają granice <u>właściwe</u> w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$, gdzie $c\in R$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

TWIERDZENIE

Jeśli funkcje f, g i h spełniają warunki:

- $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ dla każdego $x\in S(x_0)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = p$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = p$.

TWIERDZENIE

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

UWAGA

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e\ .$$

TWIERDZENIE(*Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej*)

Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła na przedziale domkniętym $< a,b >$, to jest na nim ograniczona.

UWAGA

Funkcja ciągła na przedziale otwartym nie musi być na nim ograniczona - np. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ na przedziale $x\in(0,1)$.

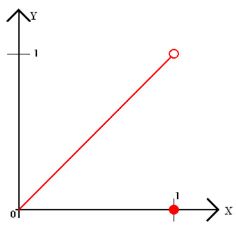
TWIERDZENIE(*o osiąganiu kresów*)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $< a, b >$, to osiąga ona w tym przedziale swój kres górny i dolny.

Inaczej - w przedziale domkniętym $< a, b >$ istnieją takie punkty $x = x_1$ oraz $x = x_2$, że wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$ są odpowiednio największą i najmniejszą z wartości funkcji $f(x)$ w tym przedziale.

UWAGA

Założenie o ciągłości funkcji f jest istotne. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x - [x]$ ($[x]$ - część całkowita x), która nie jest ciągła na przedziale $< 0, 1 >$. Jest ona ograniczona na tym przedziale, a nie osiąga wartości największej.



TWIERDZENIE(*o przyjmowaniu wartości pośrednich*)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $< a, b >$ oraz spełnia warunek $f(a) \neq f(b)$, to dla każdego $w \in (f(a), f(b))$ istnieje takie $c \in (a, b)$, że

$$f(c) = w\ .$$

TWIERDZENIE(*o miejscach zerowych funkcji*)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $< a, b >$ oraz spełnia warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f(c) = 0\ .$$

UWAGA

Jeżeli funkcja jest dodatkowo ściśle monotoniczna (tzn. rosnąca na całym przedziale lub malejąca na całym przedziale), to punkt c jest określony jednoznacznie.

TWIERDZENIE(*o lokalnym zachowaniu znaku*)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie $x = x_0$ i wartość $f(x_0)$ jest różna od 0, to dla wszystkich argumentów x dostatecznie bliskich x_0 funkcja $f(x)$ zachowuje taki sam znak, jaki ma w punkcie x_0.